О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

@ А.Ф. Кужаев

arsenkuzh@outlook.com

УДК 517.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.47.

Рассматриваются весовые пространства интегрируемых L_p^ω ($p \geq 1$) и непрерывных C^ω функций на вещественной прямой. Пусть $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}$ — система экспоненциальных мономов с положительными показателями. При естественных ограничениях на последовательность показателей этой системы и выпуклый вес ω формулируются условия, при которых каждая функция из этих подпространств продолжается до целой и представляется рядом по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$, который сходится абсолютно и равномерно на компактах в плоскости.

Ключевые слова: весовое пространство, целая функция, индекс конденсации.

On the representation of functions using series of exponential monomials

We consider the weight spaces of integrable L_p^ω ($p \geq 1$) and continuous C^ω functions on the real line. Let $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}$ be a system of exponential monomials with positive exponents. Under natural constraints on the sequence of exponents of this system and the convex weight ω , conditions are formulated under which each function of these subspaces continues to an entire function and is represented by a series in the system $\mathcal{E}(\Lambda)$, that converges absolutely and uniformly on compacts in the plane.

Keywords: weight space, entire function, condensation index

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность различных положительных чисел λ_k и их кратностей n_k . Считаем, что $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Символом $n(r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0, r)$, и пусть

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}$$

— верхняя плотность последовательности Λ . Положим еще

$$m(\Lambda) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{n_k}{\lambda_k}, \quad \sigma_\Lambda(r) = \sum_{\lambda_k < r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Кужаев Арсен Фанилевич, аспирант, БашГУ, УГНТУ (Уфа, Россия); Arsen Kuzhaev (Bashkir State University, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Пусть $\rho > 0$. Символом $\Omega_{\Lambda, \rho}$ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leq \rho|t|$, $t \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)/t = +\infty$, и, кроме того, выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_{\Lambda}(t))}{t^2} dt < +\infty$$

Рассматриваются также весовые пространства комплекснозначных интегрируемых функций на вещественной прямой ($p \geq 1$)

$$L_p^{\omega} := \left\{ f : \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\omega(t)}|^p dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

и непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^{\omega} := \{ f : \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)e^{-\omega(t)}| < +\infty \}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1}.$$

Символами $W^p(\Lambda, \omega)$ ($p \geq 1$) и $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим соответственно замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^{ω} и C^{ω} .

Отметим, что вопросы представления функций рядами экспоненциальных мономов в рассматриваемых пространствах и их частных случаях изучались, например, в работе [1]. В отличие от настоящей работы в той работе рассматривались последовательности Λ , имеющие плотность. При этом накладывалось еще условие $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h$, $k \geq 1$. В частности, это означает, что последовательность Λ имеет плотность

$$n(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r} \leq 1/h.$$

В настоящей работе формулируется утверждение о представлении функций рядом по системе экспоненциальных мономов в указанных выше весовых пространствах функций, которое справедливо при значительно более слабых условиях на последовательность Λ . Для этих целей находит своё применение индекс конденсации S_{Λ} последовательности Λ , введенный в работе [2]:

$$S_{\Lambda} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \ln \left| \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta \lambda_m), k \neq m} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta \lambda_k} \right)^{n_k} \right|.$$

Свойства индекса S_Λ и ряд примеров на его вычисление имеется в работе [3].

Теорема 1. Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < \infty$, $\sigma_\Lambda(r) \rightarrow +\infty, r \rightarrow +\infty$, $\omega_0 \in \Omega(\Lambda, \rho)$. Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ (где $\omega(t) = \omega_0(t), t \leq 0, \omega(t) = \omega_0(t) + t^2, t > 0$) продолжается до целой функции F , для которой имеет место представление вида

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, z \in \mathbb{C}.$$

При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Замечание. Явные формулы для коэффициентов $a_{k,n}$ содержатся в работе [4] (Theorem 4.2).

Литература

1. Zikkos E. Completeness of an Exponential System in Weighted Banach Spaces and Closure of Its Linear Span // J. Approx. Theory. – 2007. – V. 146 (1). – P. 115–148.
2. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Известия РАН. Серия математическая. – 2004. – Т. 68 (2). – С. 71–136.
3. Кривошеева О. А. Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости // Алгебра и анализ. – 2011. – Т. 23 (2). – С. 162–205.
4. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Kuzhaev A. F. The Representation by Series of Exponential Monomials of Functions from Weight Subspaces on a Line // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, No. 6, P. 1183–1200.