КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

@ Д.Б. Кац

Katzdavid89@gmail.com

УДК 517.53/.55

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.74.

Доклад посвящен нескольким новым результатам, связанным с классической задачей комплексного анализа - краевой задачей Римана, которая рассматривается для бианалитических функций.

Ключевые слова: краевая задача Римана, неспрямляемые кривые, бианалитические функции

Riemann's boundary value problem for bianalytic functions

The report is devoted to several new results related to the classical problem of complex analysis - the Riemann boundary value problem, which is considered for bianalytic functions.

Keywords: Riemann boundary value problem, non-rectifiable curves, bianalytic functions

Мы решаем краевую задачу Римана для бианалитических функций на контуре, состоящем из неспрямляемых замкнутых жордановых кривых. В классических результатах по этой задаче кривые кусочно-гладкие, однако краевая задача Римана имеет множество приложений в теории твердых сред и других областях. и некоторые из этих приложений допускают фрактальные (и, следовательно, неспрямляемые) контуры. В данном докладе демонстрируются результаты, полученные с помощью техники интегрирования по неспрямляемым кривым, недавно предложенную авторами для исследования задачи Римана на таких контурах.

Функция $\phi(z)$ называется бианалитической в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, если она дважды дифференцируема в этой области и

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad z \in D.$$

Теория этих функций описана в [1]; см. также [2]. В частности, любая бианалитическая функция представима как

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \bar{z}\phi_1(z), \quad z \in D,$$

Кац Давид Борисович, к.ф.-м.н., Московский политехнический университет (Москва, Россия); David Katz (Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia)

где $\phi_{0,1}$ - аналитические функции. Ясно, что $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \phi_1$, и такое представление уникально.

Пусть $\Gamma = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ есть объединение взаимно непересекающихся замкнутых простых Жордановых кривых, ограничивающих конечные непересекающиеся области D_j на комплексной плоскости, $D^+ := \bigcup_{j=1}^m D_j$, $D^- := \mathbb{C} \setminus \overline{D^+}$. Результаты, о которых пойдет речь, относятся к следующей версии краевой задачи Римана для бианалитических функций:

– Найти функцию $\phi(z)$, бианалитическую в D^+ и D^- , такую, что

(R1) : эта функция и ее производная $\phi_1 = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}$ имеют предельные значения $\phi^\pm(t)$, $\phi_1^\pm(t)$ из $D^\pm$ в любой точке $t \in \Gamma$, удовлетворяющие краевым условиям

$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$\phi_1^+(t) = G_1(t)\phi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in \Gamma,$$

где G, G_1, g, g_1 - заданные функции;

(R2) : в бесконечно удаленной точке искомая функция ограничена и ее производная по $\bar{z}$ исчезает.

Классическая краевая задача Римана для аналитических функций на кусочно-гладких кривых детально изучена (см [2], [3], [4]). Для неспрямляемых контуров ее впервые решил Б.А. Кац [5] (см. также недавнюю работу [6]); затем эти результаты были улучшены Д.Б. Кацем [7], [8]. Полное решение краевой задачи Римана для бианалитических функций на гладких контурах (с другим условием на бесконечности) было получено А.П. Солдатовым и Чаном К. Выонгом [9]. В рамках этого доклада мы поговорим о ней же, но для неспрямляемых контуров.

Литература

1. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники, серия современные проблемы математики, фундаментальное направления. **85** (1991), 187-246.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — Москва: Наука, 1977.
3. Мусхелишвили Н.И. Интегральные сингулярные уравнения. — Москва: Наука, 1962.
4. Jian-Ke Lu Boundary value problems for analytic functions. — Singapore: World Scientific, 1993.
5. Кац Б.А. Краевая задача Римана на замкнутой Жордановой кривой // Известия ВУЗов. Математика, **3** (1984), 68-80.
6. Kats B.A. The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions // Complex Variables and Elliptic Equations, **59:8** (2014), 1053-1069.

7. *Katz D.B.* New metric characteristics of non-rectifiable curves with applications // Siberian Mathematical Journal, **57**:2 (2016), 364-372.
8. *Katz D.B.* Local and weighted Marcinkiewicz exponents with applications // J. Math. Anal. Appl. **440**:1 (2016), 74-85.
9. *Солдатов А.П., Вьонг Ч.* Задача линейного сопряжения для бианалитических функций // Известия ВУЗов. Математика, **12** (2016), 76-81.