АЛГОРИТМ ПРИСОЕДИНЕННОГО ВИХРЯ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ

@ А.Н. Марковский, Д.Ю. Гамаюнова

mrkvs@yandex.ru, dasha135@inbox.ru

УДК 517.958:531.32 + 519.635.1

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.77.

Функция тока задачи обтекания представляется в виде логарифмического потенциала по обтекаемой области. Рассматривается продолжение по непрерывности функции тока из области обтекания в обтекаемую область, которое определяет присоединенный вихрь. Для построения семейства обтекающих векторных полей и соответствующих присоединенных вихрей строится сходящийся алгоритм, опирающийся на полную систему потенциалов. Представлены результаты вычислительных экспериментов для разных контуров.

Ключевые слова: задача обтекания, функция тока, вихревое течение, логарифмический потенциал, численные течения, метод базисных потенциалов

The algorithm of the attached vortex of a flat region in the flow problem

The current function of the flow problem is represented as a logarithmic potential over the streamlined region. The continuity continuation of the current function from the flow area into the flowing area, which determines the attached vortex, is considered. To construct a family of flowing vector fields and corresponding attached vortices, a convergent algorithm based on a complete system of potentials is constructed. The results of computational experiments for different contours are presented.

Keywords: flow problem, current function, vortex flow, logarithmic potential, numerical flows, method of basic potentials

1. Обозначим Q – односвязную область с кусочно-гладкой границей $S = \partial Q$. Пусть в области течения $Q^+ = R^2 \setminus \bar{Q}$ требуется построить векторное поле $\bar{w}(x) = \{u(x), v(x)\}$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее условиям: а) $\operatorname{div} \bar{w}(x) = 0$, $\operatorname{rot} \bar{w}(x) = 0$, $x \in Q^+$; б) $\bar{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$, где u_0 и v_0 заданы; в) граница S – линия тока поля $\bar{w}(x)$.

Марковский Алексей Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, КубГУ (Краснодар, Россия); Aleksey Markovsiy (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

Гамаюнова Дарья Юрьевна, аспирант, КубГУ (Краснодар, Россия); Daria Gamayunova (Kuban State University, Russia)

Задача обтекания $a) - c)$ в терминах функции тока может быть эквивалентно сформулирована как задача определения функции $\psi(x)$ такой, что выполняются равенства:

1. $\Delta\psi(x) = 0, x \in Q^+;$
2. $\nabla\psi(\infty) = \{u_0, v_0\};$
3. $\psi(x) = C \equiv \text{const}, x \in S.$

Для нестандартной краевой задачи 1) – 3) для уравнения Лапласа в [1] доказана разрешимость, дано представление решения и указан класс единственности. Справедливо утверждение: функция тока $\psi(x)$ задачи обтекания представляется в виде

$$\psi(x) = (u_0x_2 - v_0x_1) + \iint_Q g(y)E(x-y)dy, \quad x \in Q^+,$$

где $g(y) \in G(Q)$; если потенциал Робена для области Q не равен нулю, то это представление единственно в подпространстве $G(Q)$ – гармонических в $L_2(Q)$ функций. Функция $E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^2 .

Неопределенность в выборе постоянной C может быть устранена минимизацией плотности потенциала. Если постоянная Робена не равна нулю, то тождественно постоянная на границе функция $\psi^*(x)$ может быть представлена логарифмическим потенциалом по области с плотностью g^* . Тогда функцию тока задачи обтекания можно записать в виде

$$\psi(x) = (u_0x_2 - v_0x_1) + \iint_Q g_1(y)E(x-y)dy + \gamma\psi^*(x), \quad x \in Q^+.$$

Продолжая по непрерывности функцию $\psi(x)$ из Q^+ в обтекаемую область Q , будем в Q иметь общий *присоединенный* вихрь $\bar{w}(x) = \nabla_c\psi(x)$ и частный *собственный* вихрь [3] $\bar{w}^*(x) = \nabla_c\psi^*(x)$. Циркуляция векторного поля $\bar{w}(x)$ имеет вид

$$\Gamma = \iint_Q g_1(y)dy + \gamma \iint_Q g^*(y)dy.$$

Меняя множитель γ , получаем обтекающее течение со всеми возможными циркуляциями.

2. Для построения однопараметрического по циркуляции семейства векторных полей, обтекающих заданный контур $S = \partial Q$ и соответствующих присоединенных вихрей в области Q , используется метод базисных потенциалов [4]. Справедливо утверждение: система функций

$\gamma_m(x) = E(x^m - x)$, $x \in Q$, замкнута в $G(Q)$ и линейно независима, если последовательность x^m , $m = 1, 2, \dots$ удовлетворяет условию базисности.

Используя полную систему базисных потенциалов $\gamma_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, можно аппроксимировать неизвестную плотность логарифмического потенциала, сводя задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей Грама для системы $\gamma_m(x)$.

3. В докладе будут представлены результаты вычислительных экспериментов для разных контуров, в том числе для профиля Жуковского.

Литература

1. *Лежнев М.В.* Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений: учеб. пособие. — Краснодар: КубГУ, 2009.

2. *Лежнев В.Г., Марковский А.Н.* Проекционные алгоритмы вихревых 2D течений в сложных областях // Таврический Вестник Информатики и Математики, 1:26 (2015), 42–49

3. *Марковский А.Н., Лежнев В.Г.* Собственный вихрь области и расширенная задача Стокса // IX Международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике посвященная 120-летию со дня рождения акад. М. А. Лаврентьева. Сб. тез. Математические проблемы механики, 2020, 60–61

4. *Лежнев А.В., Лежнев В.Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики: учеб. пособие. — Краснодар: КубГУ, 2009