О БАЗИСНОСТИ ПО АБЕЛЮ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С НЕСОГЛАСОВАННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

@ М.Г. Гадоев, Дж. С. Искоков
gadoev@rambler.ru, dsiskhokov@gmail.com

УДК 517.957

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.10.

В работе изучается класс эллиптических дифференциальных операторов высшего порядка в ограниченной области, коэффициенты которых имеют несогласованные степенное вырождение вдоль всей границы области. Полуторалинейная форма, связанная с исследуемым оператором, может не удовлетворять условию коэрцитивности. Установлена полнота и суммируемость в смысле Абеля-Лидского системы корневых функций исследуемого оператора.

Ключевые слова: эллиптический оператор, степенное вырождение, некоэрцитивная форма, несогласованное вырождение, ограниченная область

On the Abel basis property of the system of root vector-functions of a class of elliptic operators with uncoordinated degeneration

We study a class of higher-order elliptic differential operators in a bounded domain whose coefficients have uncoordinated power-law degeneracy along the entire boundary of the domain. The sesquilinear form associated with the operator under consideration may not satisfy the coercivity condition. Abel basis property of the system of root vector-functions of operators under consideration is established.

Keywords: elliptic operator, power degeneration, noncoercive form, uncoordinated degeneration, bounded domain

Пусть Ω – ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n - 1)$ -мерной границей $\partial\Omega$ и r – некоторое натуральное число. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} (-1)^j \left(\rho^{2\tau_j}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)}, \quad (1)$$

Гадоев Махмадрахим Гафурович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой ФипМ. МПТИ (Ф) СВФУ им. М.К. Аммосова (РС(Я), Мирный, Россия); Mahmadrahim Gadoev (Mirny Polytechnic Institute (branch) of North-Eastern Federal University , Mirny, Russia)

Искоков Джафар Сулаймонович, аспирант, Институт математики им. А. Джурбаева НАН Таджикистана (Душанбе, Таджикистан); Djafar Iskhokov(A.D. Juraev Institute of mathematics national academy of sciences of Tajikistan, Tajikistan)

который понимается в смысле теории распределений на Ω . Здесь J - некоторое подмножество множества $\{0, 1, \dots, r\}$ причем $r \in J$, $\tau_j (j \in J)$ - вещественные числа. Коэффициенты $b_{kl}(x)$, $x \in \Omega$ являются ограниченными комплекснозначными функциями и $2\tau_j \geq -1/2$ для всех $j \in J$.

Рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} \int_{\Omega} \rho^{2\tau_j}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (2)$$

связанную с оператором (1).

В работе рассматривается случай несогласованного вырождения коэффициентов оператора (1) (опр. см. [1, 2]) и допускается, что форма (2) может не удовлетворять условию коэрцитивности.

Вводим пространство H_+ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\|u; H_+\| = \left\{ \sum_{h=0}^s \left\| u; W_{2; \tau_{j_h}}^{j_h}(\Omega) \right\|^2 \right\}^{1/2},$$

где $W_{p_j; \alpha_j}^i(\Omega)$ ($j \in N$, $\alpha_j, p_j \in R$, $1 \leq p_j < +\infty$) - пространство функций $u(x)$, определенных на Ω , имеющих все обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка j с конечной нормой

$$\|u; W_{p_j; \alpha_j}^i(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=i} \int_{\Omega} \rho^{p_j \alpha_j}(x) |u^{(k)}(x)|^{p_j} dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p_j} dx \right\}^{1/p_j}.$$

Символом H'_+ обозначим замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике пространства H_+ , а через H'_- обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на H'_+ с нормой $\|F; H'_-\| = \sup | \langle F, u \rangle |$, где верхняя грань берется по всем функциям $u \in H'_+$, таким, что $\|u; H_+\| = 1$. Здесь и далее символом $\langle F, u \rangle$ обозначено значение функционала F на функцию u .

При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты формы (2) доказывается, что оператор A , определенный равенством $\langle Au, v \rangle = B[u, v]$, $v \in H'_+$, действует из H'_+ в H'_- . Далее через A обозначается сужение оператора A в пространстве $L_2(\Omega)$, доказывается одно полезное представление резольвенты оператора A и с помощью этого представления доказывается следующий результат.

Теорема. Пусть $\varphi_m < \frac{\pi}{2\kappa}$, где $\kappa = \max \left\{ \frac{n}{2r}, \frac{n-1}{2r-2\tau_r} \right\}$. Тогда система корневых функций оператора A полна в $H = L_2(\Omega)$. Ряд Фу-

рье любого элемента $f \in H$ по системе корневых функций оператора A суммируется к f в смысле Абеля-Лидского со скобками порядка $\gamma = \varkappa + \mu$ с достаточно малым $\mu > 0$. Порядок резольвенты оператора A не превосходит числа $\varkappa$.

Сформулированный результат является обобщением соответствующих результатов работы [3] на случай несогласованного вырождения коэффициентов исследуемого оператора.

По поводу определения φ_m см.[4].

Литература

1. Гадоев М.Г., Исмоков Дж. С. Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области, порожденных некоэрцитивными формами // Доклады академии наук Республики Таджикистан, **62**:№ 7-8 (2019), 397-403.
2. Исмоков С.А., Якушев И.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов // Чебышевский сборник, **19**:№3 (2018) 164-182.
3. Бойматов К.Х. О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами // Сибирский математический журнал, **47**:№1 (2006) 46-57.
4. Гадоев М.Г., Исмоков Дж. С. О распределении собственных значений несамосопряженных эллиптических операторов в ограниченной области с несогласованным вырождением // Доклады академии наук Республики Таджикистан, **63**:№ 7-8 (2020), 441-449.