ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

@ Н.Ф. Абузярова

abnatf@gmail.com

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.35.

Рассматривается оператор дифференцирования в пространстве ультрадифференцируемых функций (УДФ) нормального типа на конечном или бесконечном интервале вещественной прямой и инвариантные относительно дифференцирования подпространства в $\mathcal{U}(a; b)$. Предложен вариант спектрального синтеза, учитывающий наличие в $\mathcal{U}(a; b)$ нетривиальных инвариантных относительно дифференцирования подпространств с пустым спектром.

Ключевые слова: ультрадифференцируемые функции, инвариантные подпространства, спектральный синтез, преобразование Фурье-Лапласа.

The differentiation operator in spaces of ultradifferentiable functions

We consider the differentiation operator in the space of ultradifferentiable function (UDF) of normal type $\mathcal{U}(a; b)$ defined on a finite or infinite interval of the real line and study differentiation-invariant subspaces in $\mathcal{U}(a; b)$. We propose a version of spectral synthesis which takes into account the presence of non-trivial differentiation-invariant subspaces with void spectrum.

Keywords: ultradifferentiable functions, invariant subspaces, spectral synthesis, Fourier-Laplace transform.

Пусть $\omega : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ — непрерывная, неубывающая функция, такая, что $\varphi(e^t) := \omega(e^t)$ выпукла на $[0; \infty)$ и $\omega(x) = o(x)$, $\ln x = o(\omega(x))$, $x \rightarrow \infty$,

$$\forall \sigma > 1 \exists C > 0 : \omega(x + y) \leq \sigma(\omega(x) + \omega(y)) + C, \forall x, y \geq 0,$$

$$\int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Абузярова Наталья Фаирбаховна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия);
Natalia Abuzyarova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Функцию ω с указанными свойствами называют *неквазианалитическим весом*.

Обозначим $[-c_k; c_k]$ $k = 1, 2, \dots$, возрастающую последовательность отрезков, исчерпывающую интервал $(-a; a)$ (конечный или бесконечный). Для $f \in C^\infty(-a; a)$, $q \in (0; 1)$, $k = 1, 2, \dots$, положим

$$\|f\|_{\omega, q, k} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq c_k} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*(j/q)}}$$

и определим *пространство ультрадифференцируемых функций (УДФ) нормального типа на интервале $(-a; a)$* :

$$\mathcal{U}(-a; a) = \{f \in C^\infty(-a; a) : \|f\|_{\omega, q, k} < \infty \forall q \in (0; 1), \forall k = 1, 2, \dots\}.$$

С топологией, задаваемой набором преднорм $\|\cdot\|_{\omega, q, k}$, пространство $\mathcal{U}(-a; a)$ становится локально-выпуклым пространством типа (M^*) .

Пусть $D = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования, действующий в пространстве $\mathcal{U}(-a; a)$, $W \subset \mathcal{U}(-a; a)$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно дифференцирования: $D(W) \subset W$ — короче, *D-инвариантное подпространство*.

Теорема 1. 1) *Спектр оператора $D : W \rightarrow W$ либо дискретен (в частности, пуст), либо совпадает со всей комплексной плоскостью.*
2) *Каждое D-инвариантное подпространство W содержит резидуальное подпространство (возможно, тривиальное)*

$$W_{I_W} = \{f \in \mathcal{U}(-a; a) : f = 0 \text{ на } I_W\},$$

где I_W — наименьший возможный для W относительно замкнутый в $(-a; a)$ промежуток (называемый *резидуальным промежутком подпространства W*).

Утверждения 1) и 2) теоремы 1 являются аналогами теорем 2.1 и 4.1 из работы [1], в которой было начато исследование задач спектрального анализа и синтеза для оператора D , действующего в пространстве Шварца $C^\infty(a; b)$.

Предположим теперь, что *спектр D-инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{U}(-a; a)$ (определяемый как спектр оператора $D : W \rightarrow W$) дискретен и равен $(-i\Lambda)$, где $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — конечная или счетная последовательность (возможно, пустая).* Обозначим $\text{Ехр } \Lambda$ соответствующую систему экспоненциальных одночленов, $\rho(\Lambda)$ — радиус полноты системы $\text{Ехр } \Lambda$, $|I|$ — длина промежутка $I \subset \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть W — D-инвариантное подпространство со спектром $(-i\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W .*

1) Если $2\rho(\Lambda) < |I_W|$, то

$$W = \overline{W_{I_W} + \text{span Exp } \Lambda} \quad (1)$$

(W допускает спектральный синтез в слабом смысле).

2) Если $2\rho(\Lambda) > |I_W|$, то $W = \mathcal{U}(-a; a)$.

3) Среди D -инвариантных подпространств W , для которых $2\rho(\Lambda) = |I_W|$, имеются как подпространства, допускающие слабый спектральный синтез (1), так и не допускающие его.

Теорема 2 имеет установленные ранее аналоги для слабого спектрального синтеза в пространстве Шварца $C^\infty(a; b)$ (см. [2], [3]).

Методы и подходы, применяемые для доказательства теорем 1 и 2, пригодны для изучения аналогичных вопросов в более общих пространствах УДФ, введенных в монографии А.В. Абанина [4].

Литература

1. Aleman A., Korenblum B. Derivation-invariant subspaces of C^∞ // Comp. Meth. and Function Theory, **8**:2 (2008), 493-512.
2. Абузярова Н.Ф. Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций // Доклады РАН, **457**:5 (2014), 510-513.
3. Aleman A., Baranov A., Belov Yu. Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation // J. of Func. Anal., **268** (2015), 2421-2439.
4. Абанин А.В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения // Москва: Наука, 2007.