ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ОРРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА

@ Р.И. Марванов

marvanovrustem@gmail.com

УДК 517.984, 517.928

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.20.

Для модельного оператора $L(\varepsilon)$, связанного с уравнением Орра–Зоммерфельда, изучается вопрос о необходимости известных условий А. А. Шкаликова, достаточных для локализации спектра около графа формы «Y». Рассмотрены 2 типа потенциалов, при которых предельный спектральный граф оператора $L(\varepsilon)$ удается построить в явном виде. Основным результатом работы является задача: если q монотонна и непрерывно дифференцируема и для части спектра, удовлетворяющих определённым условиям, выполняются условия квантования типа Бора–Зоммерфельда, то q допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность интервала $(0, 1)$.

Ключевые слова: уравнение Орра–Зоммерфельда, локализация спектра, предельный спектральный граф.

On localization conditions for spectrum of model operator for orr-sommerfeld equation

For the model operator $L(\varepsilon)$, connected with the Orr–Sommerfeld equation, the question of the necessity of the well-known A. A. Shkalikov conditions sufficient for localizing the spectrum near the graph of the form «Y» is studied. In this paper, two types of potentials are considered for which the limiting spectral graph of an operator $L(\varepsilon)$ can be constructed in an explicit form. The main result of this work is the problem: if q is monotone and continuously differentiable and for a part of the spectrum of $L(\varepsilon)$ Bohr–Sommerfeld kind quantization conditions hold, then q admits an analytic continuation into some neighbourhood of the interval $(0, 1)$.

Keywords: Orr–Sommerfeld equation, spectrum localization, limit spectral graph.

Рассмотрим семейство операторов $L(\varepsilon)$, порождённых в $L^2(0, 1)$ дифференциальным выражением $l_\varepsilon y = i\varepsilon^2 y'' + qy$ и краевыми условиями $y(0) = y(1) = 0$, где q - ограниченная, измеримая, вещественнозначная

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90999).

Марванов Рустем Ильдарович, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Rustem Marvanov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

функция, ε - положительный параметр. При каждом ε спектр оператора $L(\varepsilon)$ дискретен и лежит в замыкании области

$$\Pi = \{ z \in \mathbb{C} : m < \operatorname{Re}(z) < M, \operatorname{Im}(z) < 0 \},$$

где $m = \inf_{(0,1)} q$, $M = \sup_{(0,1)} q$.

Оператор $L(\varepsilon)$ принято рассматривать в качестве упрощённой модели для хорошо известного в гидродинамике оператора Орра-Зоммерфельда ([1],[2]). Через $\Gamma(c)$ обозначим часть ПГС, лежащую в полосе $\Pi_c = \{ \lambda \in \mathbb{C} : m < \operatorname{Re}(\lambda) < M, \operatorname{Im}(\lambda) < -c \}$.

Теорема 1. Пусть функция q вещественна, возрастает на $[0, 1]$, дифференцируема и $q' \in AC[0, 1]$. Далее, пусть существует такое $c > 0$, что при стремлении ε к нулю по сектору $\mathcal{E} = \{ re^{i\phi} : r > 0, |\arg \varepsilon| \leq \pi/4 \}$, $\sigma(c, \varepsilon)$ - спектр оператора $L(\varepsilon)$ в области $P_-(c) = \{ re^{i\phi} : r \geq c, -\pi \leq \phi \leq 0 \}$ - локализуется следующим образом:

$$\sigma(c, \varepsilon) = \{ \lambda_n(\varepsilon) \}_{n_1(c, \varepsilon)}^\infty \quad (1)$$

$$\lambda_n(\varepsilon) = \mu_n(\varepsilon) + o(1) \quad (2)$$

где $\mu_n(\varepsilon)$ - корни уравнения $\int_0^1 \sqrt{i(\mu - q(x))} dx = \pi n \varepsilon$, $|\mu| \geq c$, оценка $o(1)$ равномерна по n . Тогда функция q допускает голоморфное продолжение в некоторую окрестность интервала $(0, 1)$.

Литература

1. *Стёпин С.А.* Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства задачи Орра-Зоммерфельда // Мат. сборник, **188**:1, 129-146 (1997).
2. *Шкаликов А.А.* Спектральные портреты оператора Орра-Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 11-17 августа, 2002). Часть 3. СМФН // М.: МАИ. 89-112 (2003).
3. *Туманов С.Н., Шкаликов А.А.* О локализации спектра задачи Орра-Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса // Мат. заметки. **72**:4, 561-569 (2002).
4. *Покотило В.И., Шкаликов А.А.* Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с параболическим потенциалом // Мат. заметки. **86**:3, 469-473 (2009).
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов // М.: Мир. (1972)