КОНСТРУКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

© Н.П. Бондаренко
bondarenkonp@info.sgu.ru

УДК 517.984

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.4.

Получено конструктивное решение обратной спектральной задачи для матричного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом и самосопряженными краевыми условиями общего вида.

Ключевые слова: матричный оператор Штурма-Лиувилля, обратная спектральная задача, метод спектральных отображений.

Constructive solution of the inverse problem for the matrix Sturm-Liouville operator

A constructive solution of the inverse spectral problem is obtained for the matrix Sturm-Liouville operator with singular potential and with self-adjoint boundary conditions of general form.

Keywords: matrix Sturm-Liouville operator, inverse spectral problem, method of spectral mappings.

Обозначим через $L = L(\sigma, T_1, T_2, H_2)$ следующую краевую задачу для матричного уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi),$$

$$T_1 Y^{[1]}(0) - T_1^\perp Y(0) = 0, \quad T_2(Y^{[1]}(\pi) - H_2 Y(\pi)) - T_2^\perp Y(\pi) = 0,$$

где $Y = [y_j(x)]_{j=1}^m$ — вектор-функция, $Q(x)$ — матричный потенциал из класса $W_2^{-1}((0, \pi); \mathbb{C}^{m \times m})$, т.е. $Q(x) = \sigma'(x)$, $\sigma \in L_2((0, \pi); \mathbb{C}^{m \times m})$, $\sigma(x) = (\sigma(x))^*$ п.в. на $(0, \pi)$, $Y^{[1]}(x) := Y'(x) - \sigma(x)Y(x)$ — квазипроизводная, λ — спектральный параметр, $T_j \in \mathbb{C}^{m \times m}$ — ортогональные проекторы, $T_j^\perp = I - T_j$, $j = 1, 2$, $H_2 \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $H_2 = H_2^* = T_2 H_2 T_2$, I — единичная $(m \times m)$ -матрица, обозначение $\mathcal{A}((0, \pi); \mathbb{C}^{m \times m})$ используется для матриц-функций размера $(m \times m)$ с элементами из класса $\mathcal{A}(0, \pi)$. При данных условиях задача L является самосопряженной.

Спектр задачи L представляет собой счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nk}\}$, имеющих асимптотику

$$\sqrt{\lambda_{nk}} = n + r_k + \varkappa_{nk}, \quad r_k \in [0, 1), \quad \{\varkappa_{nk}\} \in l_2, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

Бондаренко Наталья Павловна, к.ф.-м.н., доцент, СГУ (Саратов, Россия), Самарский университет (Самара, Россия); Natalia Bondarenko (Saratov State University, Saratov, Russia; Samara National Research University, Samara, Russia)

где $k = \overline{1, m}$, и $n \in \mathbb{N}$ или $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в зависимости от k . Вместе с собственными значениями вводятся весовые матрицы $\{\alpha_{nk}\}$, обобщающие весовые числа скалярного оператора Штурма-Лиувилля (см. подробно в [1, 2]). Изучается **обратная задача**: по спектральным данным $\{\lambda_{nk}, \alpha_{nk}\}$ найти $\sigma(x)$, T_1 , T_2 и H_2 .

Вопрос единственности решения приведенной обратной задачи исследован в [1]. В [2] получен конструктивный алгоритм решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Полученные результаты позволили дать характеризацию спектральных данных операторов Штурма-Лиувилля на графах (см. [2]).

В основе конструктивного решения обратной задачи лежат идеи метода спектральных отображений (см. [3]). При помощи контурного интегрирования в λ -плоскости нелинейная обратная задача сводится к линейному уравнению в определенном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$:

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{R}(x)\varphi(x), \quad (2)$$

где $\varphi(x), \tilde{\varphi}(x) \in \mathfrak{B}$ и $\tilde{R}(x): \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ — линейный ограниченный оператор при каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$. При этом $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{R}(x)$ строятся по спектральным данным $\{\lambda_{nk}, \alpha_{nk}\}$, а неизвестный элемент $\varphi(x)$ связан с искомыми коэффициентами задачи L . Решение основного уравнения (2) — центральный шаг конструктивного решения обратной задачи.

В случае скалярного уравнения Штурма-Лиувилля $\mathfrak{B}$ — пространство бесконечных ограниченных последовательностей. В матричном случае потребовалось специальное построение банахового пространства $\mathfrak{B}$ с учетом разбиения собственных значений $\{\lambda_{nk}\}$ на группы в соответствии с асимптотикой (1). Кроме того, автором был выполнен перенос метода спектральных отображений на класс потенциалов из класса функций-распределений W_2^{-1} (см. [4] для скалярного случая, [1, 2] — для матричного). При этом были преодолены существенные трудности, связанные с доказательством однозначной разрешимости основного уравнения (2).

Литература

1. *Bondarenko N.P.* Direct and inverse problems for the matrix Sturm-Liouville operator with general self-adjoint boundary conditions // *Math. Notes*, **109**:3 (2021), 358-378.
2. *Bondarenko N.P.* Inverse problem solution and spectral data characterization for the matrix Sturm-Liouville operator with singular potential // *Analysis and Mathematical Physics*, **11** (2021), Article number: 145.
3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. *Bondarenko N.P.* Solving an inverse problem for the Sturm-Liouville operator with singular potential by Yurko's method // *Tamkang J. Math.*, **52**:1 (2021), 125-154.