ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НОРМАЛЬНОГО ТИПА ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ БУТРУ

@ К.Г. Малютин, И. В. Костенко
malyutinkg@gmail.com, sandrakoh@mail.ru

УДК 517.538.7

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.52.

Решена задача простой свободной интерполяции в пространстве целых функций конечного порядка и нормального типа относительно уточненного порядка в смысле Бутру. Найдены критерии разрешимости в терминах канонического произведения соответствующего узлам интерполяции.

Ключевые слова: свободная интерполяция, целая функция, порядок Бутру

Interpolation by functions of order less than the first in half-plane

The problem of simple free interpolation in the space of entire functions of finite order and normal type with respect to the improved order in the sense of Boutroux is solved. Criteria for solvability in terms of the canonical product corresponding to the interpolation nodes are found.

Keywords: free interpolation, entire function, Boutroux order

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$, $r \in [0, +\infty)$, называется уточнённым порядком в смысле Бутру, если она удовлетворяет следующим условиям

$$-\infty < \alpha = \liminf_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \leq \rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \leq +\infty,$$
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho'(r) r \ln r = 0.$$

Здесь под $\rho'(r)$ мы понимаем наибольшее производное число. Если $\alpha = \rho$, то функция $\rho(r)$ называется уточнённым порядком в смысле Валирона (часто – просто уточнённым порядком). Нас будет интересовать случай $\alpha = 0$. Положим $V(r) = r^{\rho(r)}$, $r > 0$

Малютин Константин Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, КГУ (Курск, Россия); Konstantin Malyutin (Kursk State University, Kursk, Russia)

Костенко Ирина Вадимовна, аспирант, КГУ (Курск, Россия); Iryna Kostenko (Kursk State University, Russia)

Обозначим через $[\rho(r), \infty)_B$ пространство целых функций $f(z)$, таких, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\ln |f(z)| \leq K_f V(|z|)$, где $K_f > 0$ — постоянная, зависящая от f и не зависящая от z .

Введем следующее определение.

Определение 1. Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ называется интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho(r), \infty)_B$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяющих условию:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln^+ |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty,$$

существует функция $F \in [\rho(r), \infty)_B$, решающая проблему интерполяции

$$F(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

В такой постановке задача интерполяции относится к задачам *свободной интерполяции*, когда на значения в узлах накладываются минимальные ограничения, обусловленные принадлежностью интерполирующей функции заданному пространству. Мы получаем критерии ее разрешимости в терминах канонического произведения, соответствующего узлам интерполяции.

Теорема. Следующие два утверждения эквивалентны.

- 1) Последовательность A является интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho(r), \infty)_B$.
- 2) Каноническая функция $E(z)$ последовательности A удовлетворяет соотношению:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln^+ \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty.$$

Заметим, что если $\rho(r)$ — уточнённый порядок в смысле Валирона, то теорема обобщает результат О. С. Фирсаковой [1], а в случае $\rho(r) \equiv \rho > 0$ — результаты А. Ф. Леонтьева [2, 3].

Литература

1. Фирсакова О.С. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций // Докл. АН СССР, **120**:3 (1958), 447-480.
2. Леонтьев А.Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа // Докл. АН СССР, **66**:2 (1949), 153-156.
3. Леонтьев А.Ф. К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка // Матем. сб., **4**:1 (1957), 81-96.