ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫЕ КОМПОНЕНТЫ МНОЖЕСТВА (ВЕСОВЫХ) КОМПОЗИЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА

@ А.В. Абанин

avabanin@sfsedu.ru

УДК 517.53, 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.34.

Дается описание линейно связанных компонент множества композиционных операторов в пространствах Бергмана. Установлено, что одной из таких компонент является множество компактных композиционных операторов. С другой стороны, показано, что множество компактных композиционных операторов линейно связно, но является лишь частью соответствующей компоненты.

Ключевые слова: пространства Бергмана, композиционные операторы.

Path components of the set of (weighted) composition operators on Bergman spaces

We give a description of the set of linearly connected components of the set of composition operators on Bergman spaces. It is established that one of such a component is the set of all compact composition operators. On the other hand, it is shown that the set of all weighted composition operators is linearly connected but it is only a part of the corresponding component.

Keywords: Bergman spaces, composition operators.

В докладе будут представлены результаты об описании линейно связанных компонент множества (весовых) композиционных операторов, действующих на пространствах Бергмана

$$A_{\alpha}^p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^{\alpha} d\lambda(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

где $\mathbb{D}$ — единичный круг, $p \in (0, \infty)$ и $\alpha \in (-1, \infty)$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ обозначаем множество всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций φ с $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Каждая функция $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ порождает композиционный оператор $C_{\varphi} : f \mapsto f \circ \varphi$,

Абанин Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ЮМИ ВНИЦ РАН (Владикавказ, Россия) и ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); Alexander Abanin (Southern Mathematical Institute VNC RAS, Vladikavkaz, Russia and Southern Federal University, Rostov-na-Donu, Russia)

действующий из $H(\mathbb{D})$ в $H(\mathbb{D})$. Говорят, что два композиционных оператора C_φ и C_ϕ сильно линейно связаны в пространстве $\mathcal{C}(A_\alpha^p)$ всех композиционных операторов на A_α^p , если отрезок $C_{t\varphi+(1-t)\phi}$, $0 \leq t \leq 1$, является непрерывным путем в $\mathcal{C}(A_\alpha^p)$. Установлены следующие основные результаты, полученные автором совместно с Ле Хай Хоем и Фам Тронг Тиеном.

Теорема 1. Пусть $\varphi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$. Композиционные операторы C_φ и C_ϕ сильно линейно связаны в $\mathcal{C}(A_\alpha^p)$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{\rho(\varphi(z), \phi(z)) \rightarrow 1} \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} + \frac{1 - |z|^2}{1 - |\phi(z)|^2} \right) = 0,$$

где $\rho(z, \zeta) := \left| \frac{z - \zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \right|$ — псевдогиперболическое расстояние в $\mathbb{D}$.

С помощью этого критерия установлена

Теорема 2. Множество всех компактных композиционных операторов на A_α^p сильно линейно связно и образует компоненту в $\mathcal{C}(A_\alpha^p)$.

В то же время для множества $\mathcal{C}_w(A_\alpha^p)$ всех весовых композиционных операторов $C_{\psi, \varphi} : f \mapsto \psi \cdot (f \circ \varphi)$, $\psi \in H(\mathbb{D})$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, оказалось, что аналог теоремы 2 верен лишь частично. Именно, справедлива

Теорема 3. Множество всех компактных весовых композиционных операторов на A_α^p линейно связно, но является лишь частью компоненты в $\mathcal{C}_w(A_\alpha^p)$.

Отметим, что ранее подобные результаты были известны лишь для весовых пространств с равномерной нормой или в гильбертовом случае (см. [1]–[4]).

Литература

1. MacCluer B.D. Components in the space of composition operators // Integr. Equ. Oper. Theory, **12**:5 (1989), 725–738.
2. MacCluer B.D., Ohno S., Zhao R. Topological structure of the space of composition operators on H^∞ // Integr. Equ. Oper. Theory, **40**:4 (2001), 481–494.
3. Dai J. Topological structure of the set of composition operators on the weighted Bergman space // J. Math. Anal. Appl., **473**:1 (2019), 444–467.
4. Abanin A.V., Khoi L.H., Tien P.T. Topological structure in the space of (weighted) composition operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Bull. Sci. Math., **158** (2020), article 102806.