ФОРМУЛА СЛЕДА ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПОЛОСЕ.

@ И.Г. Яндыбаева

nuga-irina@yandex.ru

УДК 517.984.4

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.33.

Данная работа посвящена вычислению формулы регуляризованного следа локального возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, спектр, формула следов.

Trace formula of a two-dimensional harmonic oscillator in a strip

This work is devoted to the calculation of the formula for the regularized trace of local perturbation of a two-dimensional harmonic oscillator in a strip.

Keywords: differential operators, spectrum, trace formula.

Рассмотрим оператор L_0 в пространстве $L_2(\Pi)$, где

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, \pi]\},$$

порожденный дифференциальным выражением

$$lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_1^2 u$$

и граничными условиями Дирихле:

$$u \in L_2(\Pi), \quad u(x_1, 0) = u(x_1, \pi) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

То есть оператор L_0 имеет область определения

$$D(L_0) = \{u(x_1, x_2) : u \in W_2^2(\Pi), \quad u(x_1, 0) = u(x_1, \pi) = 0\}.$$

Рассмотрим оператор

$$L = L_0 + V,$$

где V оператор умножения на ограниченную измеримую финитную вещественнозначную функцию $V(x)$, $x \in \Pi$.

Яндыбаева Ирина Гамировна, БашГУ (Уфа, Россия); Irina Yandybaeva (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть λ_n - собственные числа оператора L_0 , $\mu_s^{(n)}$, $s = \overline{1, \nu_n}$ - собственные числа оператора L , где ν_n - кратность собственных чисел $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 3\}$. Пусть P_n - проектор на собственное подпространство, соответствующее $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 3\}$.

Справедливо равенство [1]

$$\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1; 3\}}^n \left[\sum_{s=1}^{\nu_k} \left(\lambda_k - \mu_s^{(k)} \right) + Sp P_k V \right] = \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1; 3\}}^n \alpha_k + \beta_n$$

где

$$\alpha_k = \sum_{m \neq k} \frac{Sp P_m V P_k V}{\lambda_m - \lambda_k},$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} z Sp \left((R_0(z)V)^3 R(z) \right) dz,$$

$$R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}, \quad R(z) = (L - z)^{-1}.$$

Справедливы [2]

Теорема 1. Пусть $V(x) \in C_0^2(\Pi)$. Тогда при $k \gg 1$ справедливо асимптотическое равенство

$$\alpha_k = O\left(\frac{1}{k^\gamma}\right), \quad \gamma > 1$$

то есть, в частности, последовательность α_k абсолютно суммируема.

Теорема 2. Пусть $V(x) \in C_0^2(\Pi)$, тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1; 3\}}^n \left[\sum_{s=1}^{\nu_k} \left(\lambda_k - \mu_s^{(k)} \right) + Sp P_k V \right] = \frac{1}{12\pi} \int_{\Pi} V^2(x) dx.$$

Литература

1. Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г. Спектр и формула следа для ограниченных возмущений дифференциальных операторов // ДАН РАН, **483**:1 (2018), 19-21.

2. Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г. Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе // Дифф. ур., **55**:5 (2019), 691-701.