АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

@ С.В. Румянцева, Е.В. Выборный

srumyantseva@hse.ru, evybornyi@hse.ru

УДК 517.962.22

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.80.

Рассматривается линейное однородное разностное уравнение 2-ого порядка с гладкими коэффициентами в квазиклассическом приближении. В настоящей работе были построены явные ограничения на гладкость и рост коэффициентов уравнения, при которых решения сохраняют ВКБ вид асимптотики в неограниченной области, не содержащей точек поворота и точек сингулярности. В качестве, была построена асимптотика многочленов Лагерра большого порядка при больших значениях аргумента.

Ключевые слова: квазиклассическое приближение, ВКБ асимптотика, разностные уравнения.

Asymptotics of solutions of difference equations in an unbounded domain

We consider a linear homogeneous difference equation of the 2nd order with smooth coefficients in semiclassical approximation. We construct the explicit conditions on the smoothness and growth at infinity of the equation coefficients, such that the solution retains the WKB asymptotic form in an unbounded domain that does not contain turning points and singularities. We obtain asymptotics of Laguerre polynomials for simultaneously large values of the argument and the order of the polynomials as an example.

Keywords: semiclassical approximation, WKB approximation, difference equations.

Интерес к исследованиям разностных уравнений в квазиклассическом приближении вызван тем, что они возникают в различных актуальных физических задачах [1,2] и математических задачах [3]. Общие методы квазиклассического приближения для разностных уравнений были развиты, например, в работах [4,5].

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Румянцева София Васильевна, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Sofia Rumyantseva (HSE, Moscow, Russia)

Выборный Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Evgeny Vybornyi (HSE, Moscow, Russia)

Рассматривается однородное линейное разностное уравнение 2-ого порядка с медленно меняющимися коэффициентами:

$$a(x+h)y(x+h) + b(x)y(x) + a(x)y(x-h) = 0, \quad (1)$$

где $h > 0$ — малый параметр квазиклассического приближения. Известно, что у уравнения (1) существуют два линейно независимых решения, которые имеют равномерную ВКБ асимптотику вида [5]:

$$y_{1,2}(x, h) = \frac{1}{\sqrt{v(x, h)}} \exp \left(\pm \frac{i}{h} \int_{x_0}^x p(x, h) dx \right) (1 + O(h)). \quad (2)$$

на фиксированном отрезке $[A, B]$, не содержащем точек поворота.

В настоящей работе получены строгие условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают справедливость равномерных ВКБ оценок (2) в неограниченной области, то есть при $x \in [A, +\infty)$.

Теорема Пусть в уравнении (1) коэффициенты $a(x), b(x)$ — вещественнозначные функции класса $C^2(I)$, где $I = [x_0, +\infty)$. Пусть справедливы ограничения:

1. *отсутствуют точки сингулярности:* $a(x) \neq 0, \forall x \in I$;
2. *отсутствуют точки поворота:* $\left| \frac{b(x)}{2a(x+h/2)} \right| \leq \delta < 1, \forall x \in I$;
3. *коэффициенты на бесконечности удовлетворяют оценкам:*

$$(\log(a(x)))'' = O(x^{-2}), \quad (\log(b(x)))'' = O(x^{-2}) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Тогда существует пара линейно независимых решений $y_{1,2}(x, h)$ вида (2), где

$$p(x, h) = \arccos \left(-\frac{b(x)}{2a(x + \frac{h}{2})} \right), \quad v(x, h) = -2a \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin p(x, h),$$

Оценка (2) справедлива равномерно при $x \in I$.

В качестве можно рассмотреть разностное уравнение на ортогональные многочлены Лагерра. Получаем асимптотическое приближение для полиномов Лагерра большого порядка при больших значениях аргумента:

$$L_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{\sqrt[4]{nx}} \cos \left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4} \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right) + \\ \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{\sqrt[4]{nx}} \sin \left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{x-6}{12} \sqrt{\frac{x}{n}} + O \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

Заметим, что полученная оценка многочленов Лаггера согласуется с известной оценкой, полученной из дифференциального уравнения на многочлены Лагерра.

Литература

1. *A. Garg* Diabolical Points in Magnetic Molecules: An Exactly Solvable Model Ersin Kecicioglu // Phys. Rev. B 63, 064422 – Published 23 January 2001
2. *Vybornyi E.* On discrete WKB methods for resonance electromagnetic traps // Proceedings of the International Conference DAYS on DIFFRACTION 2019. IEEE, 2019
3. *J. S. Geronimo, D. Smith, and W. Van Assche* Strong asymptotics for orthogonal polynomials with regularly and slowly varying recurrence coefficients // J. Approx. Theory, 72, 1993, 141–158.
4. *Браун П.А.* Метод ВКБ для трехчленных рекуррентных соотношений и квазиэнергии ангармонического осциллятора // ТМФ, 1978, том 37, номер 3, 355–370.
5. *Costin O., Costin R.* Rigorous WKB for finite-order linear recurrence relations with smooth coefficients // SIAM J. Math. Anal., 1996, 27, 110-134.