ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИРАКА

@ А.С. Макин
alexmakin@yandex.ru

УДК 517.984.55

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.19.

Изучается обратная задача для несамосопряженного оператора Дирака с квазипериодическими краевыми условиями. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять целая функция, чтобы являться характеристическим определителем указанного оператора, а также необходимые и достаточные условия того, чтобы множество комплексных чисел являлось спектром рассматриваемой краевой задачи.

Ключевые слова: оператор Дирака, обратная задача, спектр, квазипериодические краевые условия.

Chararterization of spectrum of quasi-periodic problem generated by non-self-adjoint Dirac's operator

We study the inverse problem for a non-self-adjoint Dirac operator with quasi-periodic boundary conditions. Necessary and sufficient conditions are established that an entire function must satisfy in order to be the characteristic determinant of the indicated operator, as well as necessary and sufficient conditions for a set of complex numbers to be the spectrum of the considered boundary value problem.

Keywords: Dirac operator, inverse problem, spectrum, quasi-periodic boundary conditions.

В настоящей работе мы изучаем обратную спектральную задачу для системы Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \quad (1)$$

где $\mathbf{y} = \text{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

комплекснозначные функции $p, q \in L_2(0, \pi)$, с квазипериодическими краевыми условиями

$$\mathbf{y}(0) = e^{it}\mathbf{y}(\pi), \quad (2)$$

Макин Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МИРЕА (Москва, Россия);
Alexander Makin (MIREA, Moscow, Russia)

где $t \in \mathbb{C}, t \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через

$$E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) & -s_2(x, \lambda) \\ s_1(x, \lambda) & c_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1) с краевыми условиями $E(0, \lambda) = I$, где I единичная матрица. Матрица $E(\pi, \lambda)$ называется матрицей монодромии оператора (1). Для ее элементов введем обозначения $c_j(\lambda) = c_j(\pi, \lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi, \lambda)$, $j = 1, 2$. Обозначим также через PW_σ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ , таких что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$.

Хорошо известно, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) может быть приведен к виду

$$\Delta(\lambda) = -\cos t + \frac{c_1(\lambda) + c_2(\lambda)}{2},$$

а собственные значения определяются асимптотическим формулами

$$\lambda_n^\pm = 2n \pm \frac{t}{\pi} + \varepsilon_n^\pm, \quad (3)$$

где $\{\varepsilon_n^\pm\} \in l_2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $u(\lambda)$ являлась характеристическим определителем задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде*

$$u(\lambda) = -\cos t + \cos \pi \lambda + f(\lambda),$$

где $f(\lambda) \in PW_\pi$ и $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$.

Теорема 2. *Для того, чтобы множество Λ являлось спектром некоторой задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы оно состояло из двух последовательностей собственных значений $\lambda_{n,j}$, удовлетворяющих соотношению (3) и условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_n^+}{2n + t/\pi - k} + \frac{\varepsilon_n^-}{2n - t/\pi - k} \right| < \infty.$$

Характеристика спектра самосопряженного оператора Дирака с квазипериодическими краевыми условиями была дана в [1]. Обзор работ по обратным задачам для несамосопряженных дифференциальных систем первого порядка приведен в [2].

Литература

1. *Набиев И.М.* Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака. // Матем. заметки, **89**:6 (2011), 885-893.
2. *Yurko V.A.* Inverse Spectral Problems for Differential Systems //Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis (ОТНА-2018). – Rostov-on-Don: Springer, **291** 2018. – 451-475.