О ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ В СЛУЧАЕ НЕТРИВИАЛЬНОЙ МОНОДРОМИИ

@ А.А. Набиулина

nabiulina.alina.2000@mail.ru

УДК 517.984, 517.928

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.23.

В работе исследуются вопросы, связанные с локализацией и асимптотикой спектра оператора Штурма–Лиувилля на кусочно-гладкой кривой с потенциалом, мероморфным в односвязной области, содержащей кривую вместе с отрезком, соединяющим ее концы.

Ключевые слова: уравнение Штурма–Лиувилля, безмонодромные потенциалы.

Spectrum localization of the Sturm–Liouville operator on a curve in the case of a nontrivial monodromy

In this paper, we investigate questions related to the localization and asymptotics of the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a piecewise smooth curve with a potential meromorphic in a 1-connected domain containing the curve together with the segment connecting its ends.

Keywords: Sturm–Liouville equation, asymptotics of solutions, monodromy-free potentials.

Пусть γ — кривая с параметризацией $z(x) = x + ig(x)$, $x \in [0, 1]$, где g — функция, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$, отрицательная внутри $[0, 1]$ и равна 0 на его концах, Ω — область, ограниченная кривой γ и отрезком $[0, 1]$. Далее пусть q — суммируемая на γ функция и L_γ — оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу: $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) : y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma), y(0) = y(1) = 0\}$, $L_\gamma y = -y'' + qy$. Обозначим через $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ ($-\pi/2 < \arg \lambda_k \leq \pi/2$) собственные числа L_γ , занумерованные в порядке возрастания модулей.

Если функция q а) голоморфна в области Ω , ограниченной кривой γ и отрезком $[0, 1]$, б) непрерывна на замыкании Ω , то спектр L_γ совпадает со спектром оператора $L_{[0,1]}$ с потенциалом

$$p(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} q(x - i\epsilon).$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

Набиулина Алина Аликовна, магистрант I года обучения ФМИИТ, БашГУ (Уфа, Россия); Alina Nabiulina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Если функция p достаточно гладкая, скажем, непрерывно дифференцируема, то

$$\lambda_n = (\pi n)^2 + \int_0^1 q(x) dx + O(n^{-2}). \quad (1)$$

Пусть

$$q(z) = \frac{\nu^2 - 1/4}{(z - a)^p} + V, \quad (2)$$

где $a \in \Omega$, $\operatorname{Re} \nu \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, V — функция, голоморфная в области D , содержащей $\overline{\Omega}$.

Из результатов работы [1] следует, что оценка (1) верна тогда и только тогда, когда $p = 2$, $\nu - 1/2 \in \mathbb{N}$, и $V^{(2j-1)}(a) = 0$ при некотором $1 \leq j \leq n$. Поставим вопрос: как меняется (1) в случае нарушения указанных условий либо условия б)?

Ограничимся случаем $p = 2$.

Теорема 1. Если $\nu - 1/2 \notin \mathbb{N}$, то $\sigma(L_\gamma) = \{\lambda_k^{(1)}\} \cup \{\lambda_k^{(2)}\}$, где $\lambda_k^{(j)}$ ($j = 1, 2$) при больших k удовлетворяют оценкам

$$\lambda_k^{(j)} \sim \left[\frac{\pi(k - 1/4)}{\Delta_j} \right]^2 \left[1 + \frac{i \ln(2 \cos \pi \nu)}{\Delta_j} + O(k^{-2}) \right], \quad \Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = 1 - a.$$

Теорема 2. Если $\nu = n + 1/2$, $n \in \mathbb{N}$, и $m := \min\{j : V_{2j-1} \neq 0\} \leq n$, то $\sigma(L_\gamma) = \{\lambda_k^{(1)}\} \cup \{\lambda_k^{(2)}\}$,

$$\lambda_k^{(j)} = \left(\frac{\pi k}{\Delta_j} \right)^2 \left[1 + \frac{2m - 2}{\pi k i} \ln \left(\frac{C_j}{\sqrt[2m-2]{V_{2m-1}}} \right) + O\left(\frac{\ln^2 k}{k^2} \right) \right],$$

C_1, C_2 — явно вычисляемые постоянные.

Серии $l_k^{(1)}$ и $l_k^{(2)}$ на бесконечности локализуются около двух лучей $\arg l = 2\beta_1$ и $\arg l = -2\beta_2$, где $\beta_1 = -\arg a$, $\beta_2 = \arg(1 - a)$: $0 < \beta_{1,2} < \frac{\pi}{2}$. Если a лежит на вещественной оси между 0 и 1, то эти лучи совпадают. Возникает вопрос: какова асимптотика $\{l_k\}$? сохранится ли для этой последовательности разбиение на подпоследовательности вида $l_k^{(1)}$ и $l_k^{(2)}$?

Теорема 3. Пусть $0 < a < 1$. Тогда

$$\sqrt{\lambda_n} \sim \rho_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где ρ_n — нули функции

$$\Phi_0(\rho) = \cos(\pi \nu) e^{i(2a-1)\rho} - \sin \rho, \quad (2)$$

для которых справедливы следующие утверждения:

1) за исключением конечного числа все ρ_n лежат в полуполосе $\Pi_h = \{\operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < h\}$, где h — некоторая постоянная;

2) количество ρ_n в прямоугольниках $R_a = \{a < \operatorname{Re} z < a+1, |\operatorname{Im} z| < h\}$ ($a > 0$) ограничено.

В случае, когда a делит отрезок $[0, 1]$ на соизмеримые части, функция Φ_0 периодична и ее нули разбиваются на конечное число серий, соответствующих нулям из основного прямоугольника. Соответственно спектр разбивается на конечное число серий, уходящих в бесконечность вдоль «своей» параболы [2].

Литература

1. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J. **28**:1 (2017), 37–63.
2. *Ishkin Kh.K., Davletova L.G.* Regularized Trace of a Sturm–Liouville Operator on a Curve with a regular Singularity on the Chord // Differential Equations, **56**:10 (2020), 1257–1269.