ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ

@ Г. Мурат, Л.К. Кусаинова

gulnar_18.01@mail.ru, kussainova.leili@gmail.com

УДК 517.982

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.56.

В работе введены весовые пространства Бесова по типу пространств $l_p(A_j)$. Доказано свойство инвариантности относительно вещественной интерполяции. Получены теоремы вложения.

Ключевые слова: интерполяция весовых пространств.

Weighted Besov spaces. Embedding and interpolation theorems

Weighted Besov spaces according to the type of $l_p(A_j)$ spaces is introduced. The property of invariance with respect to real interpolation is proved. Embedding theorems are obtained.

Keywords: weighted spaces interpolation

Пусть $\rho, h(\cdot)$ - положительные функции в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть:

- 1) $0 < h(x) \leq 1$,
- 2) существуют такие $\varkappa > 1$ и $\tau \in (0, 1)$, что

$$\varkappa^{-1} \leq \frac{h(y)}{h(x)} \leq \varkappa, \text{ если } y \in \tilde{Q}(x) = \tau Q(x), \quad (1)$$

где $Q(x) = Q_h(x)$, $\tau Q(x) = Q_{\tau h}(x)$ при $h = h(x)$, $Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < h/2, 1 \leq i \leq n\}$. Из условий 1) и 2) на $h(\cdot)$ следует возможность представления $\mathbb{R}^n = \cup_{j=1}^n \hat{Q}^j = \cup_{j=1}^n \tilde{Q}^j$, где $\hat{Q}^j = \frac{3}{4}\tilde{Q}^j$, $\tilde{Q}^j = \tilde{Q}(x^j)$, а сами семейства $\{\hat{Q}^j\}$ и $\{\tilde{Q}^j\}$ являются конечно-кратными и конечно-разделимыми. При этом существует семейство функций $\{\psi_j\}$, $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}$, $0 \leq \psi_j \leq 1$ такое, что $\text{supp } \psi_j \subset \tilde{Q}^j$, $\psi_j = 1$ на кубе $\hat{Q}^j$, $\sum_{j=1}^\infty \psi_j(x) = 1$, и $|D^\alpha \psi_j(x)| \leq c(m)h(x^j)^{-m}$ для всех α порядка $|\alpha| = m$. См. [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (грант AP08856104).

Мурат Гулнар, PhD докторант, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Murat Gulnar (L.N. Gumilyov Eurasian national university, Nur-Sultan, Qazaqstan)

Кусаинова Лейли Кабиденовна, д.ф.-м.н., профессор, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Leili Kussainova (L.N. Gumilyov Eurasian national university, Nur-Sultan, Qazaqstan)

Пусть $s > 0$, $1 < p < \infty$, L_p , B_p^s пространство Лебега, соответственно пространство Бесова в $\mathbb{R}^n$. Положим $v_s(x) = \rho(x)h^{-s}(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Функционал

$$\|f; B_p^s(\rho, v_s)\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\rho^p(x^j) \|\psi_j f; B_p^s\| + v_s^p(x^j) \|\psi_j f\|^p \right) \right)^{1/p} \quad (2)$$

является нормой в $\mathcal{D}$. Через $B_p^s(\rho, v_s)$ будет обозначаться пополнение $\mathcal{D}$ по норме (2).

Определение корректно, так как любые две нормы вида (2) эквивалентны.

Для интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$ через $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq p < \infty$) обозначается интерполяционное пространство Петре-Леонса [2, 1.3.2].

Теорема 1. Пусть $0 \leq s_1 < s_0$, $1 < p < \infty$, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$. Имеет место равенство

$$\left(B_p^{s_0}(\rho, v_{s_0}), B_p^{s_1}(\rho, v_{s_1}) \right) = B_p^s(\rho, v_s).$$

Пусть $\rho \in L_{p,loc}$, $s > 0$ - нецелое. Обозначим через $W_p^s(\rho, v_s)$ пополнение класса $\mathcal{D}$ по норме

$$\|f; W_p^s(\rho, v_s)\| = \|v_s f; L_p\| +$$

$\left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y|^{-n-\lambda p} |\rho(x) D^\alpha f(x) - \rho(y) D^\alpha f(y)|^p dx dy \right)^{1/p}, m-, \lambda-$
дробная части числа s .

Теорема 2. Пусть $s > 0$ - нецелое. $1 < p < \infty$, и пусть ρ непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$, и существует такое $M > 0$, что

$$|\nabla \rho(y)| \leq M \rho(x) h^{-1}(x), \text{ если } y \in \tilde{Q}(x). \quad (3)$$

Тогда

$$B_p^s(\rho, v_s) = W_p^s(\rho, v_s).$$

Обозначим через $W_p^m(\rho, v_m)$ ($m \in \mathbb{N}$) весовое пространство Соболева с нормой

$$\|f; W_p^m(\rho, v_m)\| = \|v_s f; L_p\| + \|\rho \nabla_m f; L_p\|.$$

Следствие. Пусть $0 \leq m_1 < m_0$ - целые, $m_1 < s < m_0$. Если ρ удовлетворяет условию (1), то имеют место вложения

$$W_p^{m_0}(\rho, v_{m_0}) \hookrightarrow B_p^s(\rho, v_s) \hookrightarrow W_p^{m_1}(\rho, v_{m_1}).$$

Если ρ подчиняется условиям теоремы 2, то при s -нецелых

$$W_p^{m_0}(\rho, v_{m_0}) \hookrightarrow W_p^s(\rho, v_s) \hookrightarrow W_p^{m_1}(\rho, v_{m_1}).$$

Литература

1. *Кусаинова Л.К.* Об интерполяции весовых пространств Соболева. // Известия МН-АН РК, Серия физ.-матем. №5, 1997, С. 33-51.
2. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства. — Москва: Мир, 1980.