ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ НЕХАРИ-ПОКОРНОГО И НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ

@ Р.Г. Насибуллин
NasibullinRamil@gmail.com

УДК 517.948

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.57.

Мы получаем достаточные условия однолиственности в терминах оценки модуля производной Шварца функции мероморфной в единичном круге. Мы используем связь однолиственности функции с неколеблемостью решения дифференциального уравнения. Именно эта связь с неколеблемостью решения дифференциального уравнения позволяет объединить два разных объекта: неравенства Харди и достаточные условия однолиственности.

Ключевые слова: аналитическая функция, однолиственность, производная Шварца, неравенство Харди, вес Якоби.

Nehari-Pokornii type sufficient conditions for univalence and Hardy-type inequalities

We obtain sufficient univalence conditions in terms of estimating the modulus of the Schwarzian derivative of a function meromorphic in the unit disc. We use the connection between the univalence of a function and the non-oscillation of the solution of the differential equation. It is this connection with the non-oscillation of the solution of a differential equation that allows us to combine two different objects: Hardy's inequalities and univalence conditions.

Keywords: analytic function, univalence, Schwarzian derivative, Hardy inequality, Jacobi weight.

Множество работ (см., например, [1]–[4]) посвящено достаточным условиям однолиственности в терминах оценки модуля производной Шварца функции f мероморфной в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Напомним, что производная Шварца или Шварциан функции $f(z)$ определяется следующим образом

$$S_f(z) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00115).

Насибуллин Рамиль Гайсаевич, к.ф.-м.н., доцент, Казанский федеральный университет (Казань, Россия); Ramil Nasibullin (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Мы будем использовать связь однолиственности функции f с неколеблемостью решения следующего дифференциального уравнения

$$w'' + \frac{1}{2}S_f(z)w = 0.$$

Например, следующая теорема Нехари, получена с использованием такого подхода.

Теорема А. Мероморфная в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если

$$|S_f(z)| < 2S(|z|), \quad |z| < 1,$$

причем мажоранта $S(r)$ является непрерывной неотрицательной функцией и удовлетворяет условиям:

1. $S(r)(1 - r^2)^2$ не возрастает по r при $0 < r < 1$,
2. дифференциальное уравнение $y'' + S(|t|)y = 0$ при $-1 < t < 1$ имеет решение $y_0(t) > 0$.

Мы рассматриваем примеры приложений неравенств типа Харди для расширения известных классов однолистных мероморфных функций.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $\mu_k, k = \overline{1, n}$ выполняется неравенство

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{b_k A(\mu_k)}{(1 - |z|^2)^{\mu_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причем $b_k = \frac{2^{P_2 - \mu_k}}{A(\mu_k)} a_k$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1$, $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq 2$, постоянные В.В. Покорного имеют вид

$$A(\mu) = \begin{cases} 2^{3\mu-1} \pi^{2(1-\mu)}, & 0 \leq \mu \leq 1, \\ 2^{3-\mu}, & 1 \leq \mu \leq 2; \end{cases}$$

и постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при } q = 0, \\ \lambda_q & , \quad \text{при } q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_q}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & , \quad \text{при } q \in (q_0, 1], \\ 2 & , \quad \text{при } q = 1. \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа $\sqrt{\lambda_q}/q$ определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_{\nu}(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_{\nu}),$$

а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q + 2^{q/2} \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_{\nu}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)} = 0.$$

Здесь j_{ν} — первый положительный корень функции Бесселя J_{ν} .

Литература

1. *Nehari Z.* The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc., **55**:6 (1949), 545–551.
2. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М.* Достаточные условия конечнолиственности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, 25 (1987) 3–121.
3. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А.* Основные результаты в достаточных условиях однолиственности аналитических функций // УМН, **30**:4 (1975), (184), 3–60.
4. *Yamashita S.* Inequalities for the Schwarzian derivative // Indiana Univ. Math. J., **28**:1 (1979), 131–135.