КОНТРПРИМЕР ТЕОРЕМЫ ЛЕВИНСОНА

@ Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев

ellkid@gmail.com

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.7.

Доклад посвящен построению контрпримера к известной теореме Левинсона о построении асимптотики решений системы ОДУ первого порядка, имеющей так называемый L-диагональный вид. Описан класс систем ОДУ, для которых условия теоремы не выполняются, но возможно построение асимптотики решений.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, спектральная теория, теорема Левинсона.

Counterexample of Levinson's theorem

The report is devoted to the construction of a counterexample to the well-known Levinson theorem on the construction of the asymptotics of solutions to a first-order ODE system that has the so-called L-diagonal form. A class of ODE systems is described for which the conditions of the theorem are not satisfied, but the asymptotics of solutions can be constructed.

Keywords: systems of differential equations, spectral theory, Levinson's theorem.

Хорошо известно, что асимптотическое поведение на бесконечности решений системы вида

$$\frac{dY}{dx} = (\Lambda + C)Y, \quad x \in [0, +\infty) \quad (1)$$

при условии, что матрица $\Lambda(x)$ - диагональная матрица, функции $\Re(\lambda_i - \lambda_j)$ не меняют знак при достаточно больших x , а $C(x)$ состоит из суммируемых на $[0, +\infty)$ функций, определяется только элементами матрицы $\Lambda(x)$. (см.[1], с.287).

Работа выполнена при поддержке Гранта Республики Казахстан AP08856104-ОТ-20 (Султанаев Я.Т.)

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, (Уфа, Россия); Valeev Nurmukhamet Fuatovich, Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia

Назирова Эльвира Айратовна, к.ф.-м.н., доцент, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Nazirova Elvira Ayratovna, Bashkir State University, Ufa, Russia

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный педагогический университет им.Акмоллы (Уфа, Россия); Sultanaev Yaudat Talgatovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bashkir State Pedagogical University named after Akmulla, Ufa, Russia

Предлагается рассмотреть систему

$$\frac{dY}{dx} = (\Lambda + C + H)Y, \quad x \in [0, +\infty) \quad (2)$$

где матрицы Λ, C удовлетворяют условиям выше, а матрица имеет вид: $H(x) = h'(x)H_0$, где функция $h'(x)$ не является суммируемой,

$$H_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad a, b = \text{const}$$

Обозначим через $r(x) = \lambda_2(x) - \lambda_1(x)$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть

$$\int_x^\infty r(t)h(t)dt \in L[x_0, \infty),$$

Тогда (2) может быть приведена к системе, удовлетворяющей условиям леммы из [1, с.287].

Теорема позволяет получать асимптотические формулы для решений систем вида (2) на бесконечности.

Пример

Условия теоремы выполнены, например, если $\lambda_1(x) = 1$, $\lambda_2(x) = 2$, $h'(x) = e^{2x} \sin e^{2x}$ либо же $h'(x) = x^\alpha \sin x^\beta$, $\beta > \alpha/2 + 3/2$.

1. Наймарк М.А. . Линейные дифференциальные операторы (2-е изд.). //Москва : Гостехиздат, 1954. - 352 с.

2. Н. Ф. Валеев, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанов О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений // Уфимск. матем. журн., 7:3 (2015), 9–15