К ПРИМЕНЕНИЮ ГИБРИДНОГО ПОДХОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

@ А.Д. Ханазарян, А.Н. Шпак, М.В. Голуб
artur97.10@mail.ru

УДК 539.3

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.97.

Рассматривается приложение метода спектральных элементов для решения динамических задач теории упругости. Решается антиплоская задача для составной области, результаты расчетов сравниваются с известными методами.

Ключевые слова: слоистый волновод, метод спектральных элементов

On the application of a hybrid approach for solving dynamic problems of elasticity theory based on the spectral element method

The application of the spectral element method for elastic dynamic problems is considered. The antiplane problem for a composite domain is solved, the calculation results are compared with known methods.

Keywords: layered waveguide, spectral element method.

Как правило, конечноэлементные пакеты (например, COMSOL Multiphysics), основанные на методе конечных элементов, позволяют строить решение для протяженных волноводов с неоднородностями сложных форм, но не позволяют проводить модальный анализ решений [1]. Основной мотивацией данной работы является развитие подходов на основе метода спектральных элементов (МСЭ) [2] для решения динамических задач теории упругости в случае слоистых волноводов с неоднородностями. При этом МСЭ используется не только для описания поведения областей сложной формы, но и для моделирования распространения волн в протяженных волноводах [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (грант № МК-470.2020.1).

Ханазарян Артур Дереникович, асп., Кубанский государственный университет (Краснодар, Россия); Artur Khanazaryan (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

Шпак Алиса Николаевна, к.ф.-м.н., науч. сотр., Кубанский государственный университет (Краснодар, Россия); Alisa Shpak (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

Голуб Михаил Владимирович, д.ф.-м.н., зав. каф., Кубанский государственный университет (Краснодар, Россия); Mikhail Golub (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

Рис. 5: Геометрия задачи для составной области.

В данной работе рассматривается антиплоская задача для составной области $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset R^2$, см. рис. 1. В этом случае колебания каждой области Ω_j описываются уравнениями Гельмгольца

$$\nabla^2 u_j(x_1, x_2) + \kappa_j^2 u_j(x_1, x_2) = 0.$$

Для первой области $\Omega_1 = [-b_1, 0] \times [0, h_1]$ решение уравнения Гельмгольца отыскивается численно с использованием МСЭ в виде разложения по базисным функциям, а именно, используя интерполяционные полиномы на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто

$$u_1(x_1, x_2) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_{i_1 l_2}^{l_1 l_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) = \sum_I u^I C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}).$$

Для второй области $\Omega_2 = [0, b_2] \times [0, h_2]$ решение отыскивается полуаналитически в виде

$$u_2(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^G c_n^m U(\alpha, x_2, \overline{\beta^n}) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (b_m - x_1)}.$$

Неизвестные $U(\alpha, x_2, \overline{\beta^n})$, λ_n и $\overline{\beta^n}$ находятся из решения вспомогательной задачи также с использованием МСЭ, где $U(\alpha, x_2, \overline{\beta^n})$ является преобразованием Фурье исходного уравнения по горизонтальной координате, а λ_n и $\overline{\beta^n}$ собственные значения и собственные вектора соответственно. Коэффициенты разложения c_n^m отыскиваются с помощью проекционного метода Бубнова–Галёркина.

Для удобства вводится вектор нагрузки $\boldsymbol{\tau} = \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\}$, состоящий из касательных и нормальных напряжений. На общей для двух областей границе $\Omega_1 \cup \Omega_2$ задаются условия на непрерывность перемещений и напряжений:

$$[\mathbf{u}(0, x_2)] = 0, \quad [\boldsymbol{\tau}(0, x_2)] = 0,$$

здесь квадратные скобки $[f]$ означают скачок заданной функции f . Также на границе двух областей вводится функция $\mathbf{q}$ и задаются условия на напряжения:

$$\mathbf{q}(x_2) = \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_2=1}^{N+1} q_{i_2}^{l_2} C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad \tau(0, x_2) = \mathbf{q}(x_2).$$

Неизвестные коэффициенты разложения функции $\mathbf{q}(x_2)$ находятся на основе метода коллокаций. Проверяется выполнение граничных условий. Результаты расчетов сравниваются с известными методами.

Литература

1. *Golub M. V., Shpak A. N.* Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure // *Applied Mathematical Modelling*, **65** (2019), 234-255.
2. *Komatitsch D., Vilotte J.P., Vai R., Castillo-Covarrubias J.M., Sanchez-Sesma F.J.* The spectral element method for elastic wave equations application to 2-D and 3-D seismic problems // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45:9** (2019), 1139-1164.
3. *Kalkowski M.K., Rustighi E., Waters T.P.* Modelling piezoelectric excitation in waveguides using the semi-analytical finite element method // *Computers & Structures*, **173** (2016), 174-186.