ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

@ А.Б. Хасанов, У.А. Хойтметов

ahasanov2002@mail.ru, x_umid@mail.ru

УДК 517.957

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.43.

Работа посвящена интегрированию модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительным членом в классе быстроубывающих функций.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, обратная задача теории рассеяния, эволюция данных рассеяния.

Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with an additional term

The work is devoted to the integration of the modified Korteweg-de Vries equation with an additional term in the class of rapidly decreasing functions.

Keywords: modified Korteweg-de Vries equation, inverse scattering problem, evolution of scattering data.

В данной работе изучается модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с дополнительным членом, а именно, рассматривается следующее уравнение

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x(x,t) = 0, \quad (1)$$

где $\gamma(t)$ - заданная непрерывно дифференцируемая функция. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

где начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Aknazar Khasanov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Хойтметов Умид Азадович, к.ф.-м.н., доцент, Хорезмское отделение института математики им. В.И. Романовского, (Ургенч, Узбекистан); Umid Hoitmetov (Khorezm Branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Urgench, Uzbekistan)

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)| e^{2\varepsilon|x|} dx < \infty; \quad (3)$$

2) несамосопряженный оператор $L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$ с кратностями

$$m_1(0), m_2(0), \dots, m_{2N}(0).$$

Пусть функция $u(x, t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$ т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} \right| e^{2\varepsilon|x|} dx < \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (4)$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция $u(x, t)$ является решением задачи (1)-(4), то данные рассеяния несамосопряженного оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$m_k(t) = m_k(0), \quad \xi_k(t) = \xi_k(0), \quad k = \overline{1, N}.$$

$$\frac{dr^+}{dt} = (8i\xi^3 - 2i\xi\gamma(t)u(0, t)) r^+, \quad (|\operatorname{Im} \xi| < \varepsilon).$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_1^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t)u(0, t)) \chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_2^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_2^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t)u(0, t)) \chi_1^n + 24i\xi_n\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_3^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_3^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t)u(0, t)) \chi_2^n + 24i\xi_n\chi_1^n + 8i\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_l^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_l^n + (24i\xi_n^2 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_{l-1}^n$$

$$+ 24i\xi_n\chi_{l-2}^n + 8i\chi_{l-3}^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad l = 4, 5, \dots, m_n - 1.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(4).

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x = 0; \quad u(x, 0) = -\frac{2}{\operatorname{ch} 2x},$$

где $\gamma(t) = 2(t^2 + 1) + \frac{t^2 + 1}{2\sqrt{t^2 + 2}}$.

Решение данной задачи Коши имеет вид $u(x, t) = -\frac{2}{\operatorname{ch} 2\left(x + \operatorname{arcsch} \frac{t}{\sqrt{2}}\right)}$.

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — Москва: Мир, 1987, — 479 с.
2. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **44**:4 (2004), 694–716.
3. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — Москва: Высшая школа, 1995.
4. *Хасанов А.Б.* Об обратной задачи теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР, **277**:3 (1984), 559–562.
5. *Хасанов А.Б., Хоитметов У.А.* Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе быстроубывающих функций // Докл. АН РУз., 1 (2021), 13–18.
6. *Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation // Phys. Rev. Lett., 19 (1967), 1095–1097.
7. *Lax P.D.* Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves // Comm. Pure and Appl. Math. 1968, **21**:5 (1968), 467–490.