О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ГРАНИЦЕ КУБА

@ Э. Мухамадиев, А.Б. Назимов, М.А. Очилова

emuhamadiev@rambler.ru, n.akbar54@mail.ru, ochilovamuhaje@gmail.com

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.23.

Рассматривается гармоническая функция в открытом кубе. Изучается вопрос существования предела гармонической функции на границе куба. Утверждается действие граничного оператора в пространстве непрерывных функций.

Ключевые слова: гармоническая функция, потенциал двойного слоя, плотность потенциала, граничные значения

ON THE LIMIT VALUES OF THE HARMONIC FUNCTION ON THE BOUNDARY OF THE CUBE

A harmonic function in an open cube is considered. The question of the existence of a limit of a harmonic function on the boundary of a cube is studied. The action of the boundary operator in the space of continuous functions is stated.

Keywords: harmonic function, double layer potential, boundary values

Рассматривается гармоническая в кубе

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y, z < 1\}$$

функция $u(x, y, z)$, преставленная потенциалом двойного слоя [1]

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial n_{(\xi, \eta, \zeta)}} \frac{1}{r} dS_{(\xi, \eta, \zeta)},$$

где

$$r = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2},$$

с заданной плотностью $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, определенной и непрерывной на границе Σ куба T . Поверхностный интеграл рассматривается как сумма шести поверхностных интегралов по граням Σ_i , $i = 1, \dots, 6$ куба T :

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 u_i(x, y, z).$$

Мухамадиев Эргашбой, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Ergashboy Mukhamadiev (Vologda State University, Vologda, Russia)

Назимов Акбар Багадурович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Akbar Nazimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

Очилова Мухайёхон Акбаровна, старший преподаватель, ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Muhaiejkhon Ochilova (Gafurov State University of Khujand, Tajikistan)

Изучается существование предела функции $u(x, y, z)$ при приближении (x, y, z) к граничной точке $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ куба T . Оказывается, предел существует, но, в отличие от потенциала двойного слоя вдоль гладкой поверхности [2], различаются три случая:

- 1) (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой грани Σ_i ;
- 2) (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой ребра $\Gamma_{i,j} = \Sigma_i \cap \Sigma_j$;
- 3) (x_0, y_0, z_0) совпадает с вершиной $V_{i,j,k} = \Sigma_i \cap \Sigma_j \cap \Sigma_k$.

Заметим, что если $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma \setminus \Sigma_j$, то существует предел

$$\bar{u}_j(x_0, y_0, z_0) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} u_j(x, y, z).$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Если (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой грани Σ_i , то существует предел*

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} u(x, y, z) = \varphi_i(x_0, y_0, z_0) + \sum_{j \neq i} \bar{u}_j(x_0, y_0, z_0).$$

Лемма 2. *Если (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой ребра $\Gamma_{i,j} = \Sigma_i \cap \Sigma_j$, то существует предел*

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} u(x, y, z) = \frac{3}{2} \varphi_i(x_0, y_0, z_0) + \sum_{k \neq i, k \neq j} \bar{u}_k(x_0, y_0, z_0).$$

Лемма 3. *Если (x_0, y_0, z_0) совпадает с одной из вершин $V_{i,j,k} = \Sigma_i \cap \Sigma_j \cap \Sigma_k$, то существует предел*

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} u(x, y, z) = \frac{7}{4} \varphi_i(x_0, y_0, z_0) + \sum_{l \neq i, l \neq j, l \neq k} \bar{u}_l(x_0, y_0, z_0).$$

Отсюда вытекает

Теорема 1. *Функция $u(x, y, z)$ непрерывно продолжима на замыкании $\bar{T} = T \cup \Sigma$ куба T .*

В банаховом пространстве $C(\Sigma)$ непрерывных на Σ функций с равномерной нормой определим оператор

$$(A\varphi)(x, y, z) = \bar{u}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma,$$

где $\bar{u}(x, y, z)$ – граничное значение потенциала двойного слоя с плотностью $\varphi \in C(\Sigma)$.

Теорема 2. *Оператор A непрерывно действует из $C(\Sigma)$ в $C(\Sigma)$.*

Полученные результаты можно считать трехмерным аналогом результатов, полученных в работе [2].

Литература

1. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. *Назимов, А.Б.* Классический и регуляризованный операторы Пуассона в пространствах непрерывных и ограниченных функций / *А.Б. Назимов, Э.М. Мухамадиев, В.А. Морозов.* – Вологда, ВоГТУ, 2010. – 148 с.