УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

@ В.Н. Павленко, Д.К. Потапов

pavlenko@csu.ru, d.potapov@spbu.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.27.

Рассматривается эллиптическая краевая задача с разрывной нелинейностью экспоненциального роста на бесконечности. Вариационным методом получена теорема существования слабого полуправильного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: эллиптическая краевая задача, разрывная нелинейность, экспоненциальный рост, слабое решение, полуправильное решение, вариационный метод.

Elliptic equations with discontinuous nonlinearities of exponential growth

We consider an elliptic boundary value problem with a discontinuous nonlinearity of exponential growth at infinity. Using a variational method, we establish a theorem on the existence of a weak semiregular solution.

Keywords: elliptic boundary value problem, discontinuous nonlinearity, exponential growth, weak solution, semiregular solution, variational method.

Изучается задача Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывной нелинейностью следующего вида:

$$Lu(x) \equiv - \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x) = g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Здесь Ω — ограниченная область класса $C^{1,1}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; L — формально самосопряжённый равномерно эллиптический в области Ω дифференциальный оператор с константой эллиптичности $\chi > 0$; коэффициенты

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740003.

Павленко Вячеслав Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Vyacheslav Pavlenko (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Потапов Дмитрий Константинович, к.ф.-м.н., доцент, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Dmitriy Potapov (Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $c \in C(\bar{\Omega})$, $c(x) \geq 0$ в Ω ; $g(x, u)$ — суперпозиционно измеримая на $\Omega \times \mathbb{R}$ функция.

Предполагается, что для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет конечные односторонние пределы $g(x, u \pm) = \lim_{\eta \rightarrow u \pm 0} g(x, \eta)$ в любой точке $u \in \mathbb{R}$. На бесконечности нелинейность $g(x, u)$ допускает по фазовой переменной u рост порядка $|u|^{\alpha} e^{A|u|^{\tau}}$, где постоянные α , A и τ положительные, $\tau < 2$.

Слабым решением задачи (1), (2) называется функция $u \in H^1_0(\Omega)$ такая, что для любого $v \in H^1_0(\Omega)$ выполняется равенство

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} g(x, u(x)) v(x) dx.$$

Полуправильным решением задачи (1), (2) называется такое её слабое решение $u(x)$, что для почти всех $x \in \Omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

Вариационным методом получен следующий результат.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $g(x, u-) \leq g(x, u+)$ и имеет место включение $g(x, u) \in [g(x, u-), g(x, u+)]$ для любого $u \in \mathbb{R}$;
 - 2) существуют положительные константы b , α , A и τ , $\tau < 2$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ справедлива оценка $|g(x, u)| \leq a(x) + b|u|^{\alpha} e^{A|u|^{\tau}}$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_N(\Omega)$, $L_N(\Omega)$ — класс Орлица измеримых на Ω функций, ассоциированный с N -функцией $N(u)$, $N(u)$ дополнительная к N -функции $M(u) = |u|^{\alpha+2} e^{|u|^s}$, $s \in (\tau, 2)$;
 - 3) для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $\int_0^u g(x, s) ds \leq (ku^2 + d(x)|u|^{\theta} + d_1(x))/2$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $k < \chi/\|P_1\|^2$, χ — константа эллиптичности дифференциального оператора L , P_1 — оператор вложения $H^1_0(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, $d \in L_{2/(2-\theta)}(\Omega)$, $\theta \in (0, 2)$, d_1 — суммируемая на Ω функция.
- Тогда задача (1), (2) имеет слабое полуправильное решение $u \in H^1_0(\Omega)$.

Проблема существования слабых решений эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями экспоненциального роста изучалась, например, в [1]–[6]. В отличие от [1]–[5] в данной работе не предполагается, что нелинейность $g(x, u)$ неубывающая по u , а в отличие от [6] — что для некоторого $u_0 \geq 0$ функция $g(x, u) = 0$ при $u < u_0$ и $g(x, u) > 0$ при $u > u_0$. В работах [1]–[6] полуправильные решения не рассматривались. Кроме того, при доказательстве теоремы используется вариационный подход, базирующийся на понятии квазипотенциального оператора, в отличие от традиционного подхода, где используется

обобщённая производная Кларка. Последние работы, где он был применен, [7], [8]. Отметим также, что в [7], [8] уравнения с нелинейностями экспоненциального роста не рассматривались.

Литература

1. *de Souza M., de Medeiros E., Severo U.* On a class of quasilinear elliptic problems involving Trudinger-Moser nonlinearities // J. Math. Anal. Appl., **403**:2 (2013), 357-364.
2. *de Souza M., de Medeiros E., Severo U.* On a class of nonhomogeneous elliptic problems involving exponential critical growth // Topol. Methods Nonlinear Anal., **44**:2 (2014), 399-412.
3. *de Souza M.* Existence of solutions to equations of N -Laplacian type with Trudinger-Moser nonlinearities // Appl. Anal., **93**:10 (2014), 2111-2125.
4. *de Souza M.* On a class of nonhomogeneous elliptic equation on compact Riemannian manifold without boundary // Mediterr. J. Math., **15**:3 (2018), art. no. 101, 11 p.
5. *de Souza M.* On a class of nonhomogeneous elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds // Complex Var. Elliptic Equ., **64**:3 (2019), 386-397.
6. *Alves C.O., Santos J.A.* Multivalued elliptic equation with exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$ // J. Differ. Equ., **261**:9 (2016), 4758-4788.
7. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании трёх нетривиальных решений резонансной эллиптической краевой задачи с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения, **56**:7 (2020), 861-871.
8. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* Вариационный метод для эллиптических систем с разрывными нелинейностями // Матем. сб., **212**:5 (2021), 133-152.