О КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА НА ОГРАНИЧЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

@ А.В. Фаминский
afaminskii@sci.pfu.edu.ru

УДК 517.958

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.40.

Рассматривается начально-краевая задача на ограниченном интервале для класса квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка (выше первого) с нелинейностью общего вида. Предположения на вид уравнения не предполагают глобальных априорных оценок для решений произвольного размера. В случае малых граничных функций и малой правой части уравнения установлены результаты о глобальном существовании и единственности слабых решений, а также об их экспоненциальном убывании при больших временах.

Ключевые слова: начально-краевые задачи, эволюционные уравнения нечетного порядка квазилинейные эволюционные уравнения, глобальная разрешимость, поведение решений при больших временах.

On odd-order quasilinear evolution equations on bounded intervals with general nonlinearity

An Initial-boundary value problem, posed on a bounded interval, is considered for a class of odd-order (more than one) quasilinear evolution equations with general nonlinearity. Assumptions on the equations do not provide global a priori estimates for solutions of an arbitrary size. For small initial and boundary data, small right-hand side function results on global existence and uniqueness of weak solutions, as well as on their large-time exponential decay are established.

Keywords: initial-boundary value problem, odd-order evolution equation, quasilinear evolution equation, global solubility, large-time behavior.

На интервале $(0, R)$ для произвольного $R > 0$ рассматривается на-

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Фаминский Андрей Вадимович, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия); Andrei Faminskii (RUDN University, Moscow, Russia)

чально-краевая задача для уравнения

$$u_t - (-1)^l (\partial_x^{2l+1} u + a_{2l} \partial_x^{2l} u) - \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \partial_x^j [a_{2j+1}(t, x) \partial_x^{j+1} u + a_{2j}(t, x) \partial_x^j u] + \sum_{k=0}^l (-1)^k \partial_x^k [g_k(t, x, u, \dots, \partial_x^{l-1} u)] = f(t, x), \quad l \in \mathbb{N},$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ и краевыми условиями

$$\partial_x^j u(t, 0) = \partial_x^j u(t, R) = 0, \quad j = 0, \dots, l-1, \quad \partial_x^l u(t, R) = \nu(t).$$

Уравнения подобного типа составляют класс квазилинейных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в различных средах с дисперсией.

Предполагается, что $a_{2l} \leq 0$, коэффициенты a_j при $j \leq 2l-1$ малы в некотором смысле или имеют подходящий знак, функции $g_k(t, x, y_0, \dots, y_{l-1})$ удовлетворяют некоторым условиям ограничения роста по переменным y_j . Тогда при малых функциях $u_0 \in L_2(0, R)$, $\nu \in L_2(0, +\infty)$ и $f \in L_2((0, +\infty) \times (0, R))$ существует единственное слабое решение рассматриваемой задачи $u(t, x)$, такое что $u \in C([0, T]; L_2(0, R))$, $\partial_x^l u \in L_2((0, T) \times (0, R)) \forall T > 0$. Более того, если функции ν и f экспоненциально убывают при $t \rightarrow +\infty$, то решение также экспоненциально убывает в пространстве $L_2(0, R)$.

Полученный результат применим, например для уравнения Каупа–Купершмидта

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + c_1 u^2 u_{xxx} + c_2 u u_x u_{xx} + c_3 u^3_x + c_4 u u_{xxx} + c_5 u_x u_{xx} + c_6 u^2 u_x + c_7 u u_x = 0,$$

для которого не существует глобальной априорной оценки решения в пространстве $L_2(0, R)$ при отсутствии условий на малость решения.

Данные результаты опубликованы в статье [1].

Литература

1. *Faminskii A. V.* Odd-order quasilinear evolution equations with general nonlinearity on bounded intervals // *Lobachevskii J. Math.*, **42**:5 (2021), 875-888.