КАСКАДЫ БИФУРКАЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В УЧЕБНОЙ ГРУППЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ НЕФОРМАЛЬНЫМ ЛИДЕРОМ

@ Е.Ю. Лискина, С.А. Бельман

katelis@yandex.ru, sabelman@mail.ru

УДК 517.925.41

*DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.*86.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая педагогическое ввзаимодействие в группе студентов. Педагогическое воздействие выражено суммой некоторой константы и управляющего параметра. Найдены состояния равновесия системы, определены типы и последовательности их бифуркаций, возникающие при изменении управляющего параметра. Получены коэффициентные условия возникновения устойчивых продуктивных состояний равновесия и соответствующие бифуркационные значения параметра.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, состояние равновесия, устойчивость бифуркация

Cascades of bifurcations in a dynamic model of socio-pedagogical interaction in a study group with a negative informal leader

We consider a system of ordinary differential equations that models pedagogical interaction in a group of students. The pedagogical impact is the sum of a certain constant and a control parameter. We found the equilibrium points of the system, determined the types and sequences of their bifurcations that occur when the control parameter changes. We obtained the coefficient conditions for the occurrence of stable productive equilibrium points and the corresponding bifurcation values of the parameter.

Keywords: ordinary differential equations, equilibrium point, stability, bifurcation

В работе [1] предложена модель социально-педагогического взаимодействия в студенческой группе. Внесем в модель уточнения:

Лискина Екатерина Юрьевна, к.ф.-м.н., заведующий кафедрой, РГУ имени С.А. Есенина (Рязань, Россия); Ekaterina Liskina (Ryazan State University named for S.A. Esenin, Ryazan, Russia)

Бельман Светлана Александровна, к.ф.-м.н., доцент, РГУ имени С.А. Есенина (Рязань, Россия); Svetlana Belman (Ryazan State University named for S.A. Esenin, Ryazan, Russia)

1) скорость изменения количества вовлеченных студентов пропорциональна численности этих студентов, ограниченной максимальной численностью w_1 суммы количества вовлеченных студентов и количества тех не вовлеченых студентов потока, которые могут рассматривать профессию учителя среди своих возможных профессий ($w_1 \le w$), и убывает при наличии отрицательного воздействия на вовлеченных студентов;

2) скорость изменения количества не вовлеченных студентов зависит от их численности, ограниченной максимальной численностью w_2 суммы количества не вовлеченных студентов и тех вовлеченных студентов потока, которые в процессе обучения могут перестать рассматривать профессию учителя своей возможной профессией ($w_2 \le w$), и увеличивается за счет влияния не вовлеченных студентов на вовлеченных (т.е. студент из группы вовлеченных студентов может перейти в группу не вовлеченных студентов);

3) численность потока w является постоянной; $w_1 + w_2 \le 2w$.

Тогда система дифференциальных уравнений, моделирующая взаимную динамику вовлеченных и не вовлеченных студентов, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = ax\left(1 - \dfrac{x}{w_1}\right) - d_1xy, \\ \dot{y} = -(a+\alpha)y\left(1 - \dfrac{y}{w_2}\right) + d_2xy. \end{cases} \tag{1}$$

Непосредственными вычислениями установлено, что система (1) имеет 4 состояния равновесия: $O(0,0)$, $K(0,w_2)$, $L(w_1,0)$, $M(x_0(\alpha); y_0(\alpha))$, где

$$x_0(\alpha) = \frac{(a+\alpha)w_1(w_2d_1 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a+\alpha)}, \quad y_0(\alpha) = \frac{aw_2(w_1d_2 - (a+\alpha))}{w_1w_2d_1d_2 - a(a+\alpha)}.$$

Состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ необходимо рассматривать в I координатной четверти.

При этом предельное положение точки $M(x_0(0), y_0(0))$ в I координатной четверти существует при выполнении следующей совокупности коэффициентных условий:

$$\begin{cases} d_1w_2 - a > 0, \\ w_1w_2d_1d_2 - a^2 > 0, \\ d_2w_1 - a \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1w_2 - a < 0, \\ w_1w_2d_1d_2 - a^2 < 0, \\ d_2w_1 - a \le 0. \end{cases} \tag{2}$$

Получены бифуркационные значения параметра: $\alpha_0 = d_2w_1 - a$, $\alpha_1 = d_2w_1 - d_1w_2$, $\alpha_2 \in (\alpha_1; \alpha_0)$.

Пусть справедлива первая система неравенств совокупности (2). Тогда в I четверти расположено 4 состояния равновесия: седла O, K, L и точка M. При $d_1w_2 - d_2w_1 > 0$ и $\alpha = 0$ точка M — устойчивый узел. При возрастании α точка M приближается к точке L, оставаясь устойчивым узлом. При $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$ и $\alpha = 0$ точка M — неустойчивый фокус. При переходе через $\alpha = \alpha_1$ фокус меняет характер устойчивости, в системе возможно возникновение периодических решений. При $\alpha_2 \in (\alpha_1, \alpha_0)$ точка M меняет характер с фокуса на узел. При $d_1w_2 - d_2w_1 = 0$ и $\alpha = 0$ точка M — сложное состояние равновесия. При возрастании $\alpha \geq 0$ она может до трех раз менять характер с фокуса на узел (устойчивый). Во всех трех случаях при $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация точек L и M, состояние равновесия M исчезает в I четверти. При дальнейшем возрастании параметра α точка L остается устойчивым узлом.

Если справедлива вторая система неравенств совокупности (2), то при любом соотношении d_1w_2 и d_2w_1 и при $\alpha = 0$ в системе (1) в I четверти расположено 4 состояния равновесия: седла O, M, устойчивый узел L и неустойчивый узел K. При возрастании $\alpha \geq 0$ топологическая структура фазового портрета в I координатной четверти не меняется.

Литература

1. *Бельман С.А., Лискина Е.Ю.* О регулировании педагогического воздействия в динамической модели студенческой группы, имеющей отрицательного неформального лидера // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование, **2** (2021), с. 10-19.