АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ ПОВЕДЕНИЙ РЕШЕНИЙ КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

@ М.К. Арабов

cool.araby@mail.ru

УДК 517.91

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.6.

В работе приводится сравнение поведений решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Получены новые условия для коэффициентов нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка которые обеспечивают устойчивость в целом его решений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, устойчиво в целом, предельный цикл.

ANALYSIS AND COMPARISON OF SOLUTION BEHAVIOR PIECE-NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

The paper compares the behavior of solutions to nonlinear differentials general equations of the second order. New conditions for the coefficients of nonlinear differential equations of the second order that provide stability in the whole of its solutions.

Keywords: differential equation, periodic solution, stable overall, limit cycle

Отметим, что особое место в теории “негладких” систем занимают задачи о дифференциальных уравнениях, содержащих кусочно-линейные функции и, в частности, функции типа модуля [1-3]. Так, многие теоретические и практические задачи приводят к необходимости рассмотрения квазилинейных автономных систем:

$$y'' + ay' + by = \varphi(x, x', \lambda), \quad (1)$$

где a, b, c, λ - некоторые числа, а функция $\varphi(y, y')$ -непрерывно дифференцируемая и ограниченная, то есть существует $M > 0$, такая что

$$\sup_{(y, y')} |\varphi(y, y')| < M.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Республики Таджикистан (проект № 0117ТJ00807).

Арабов Муллошараф Курбонович, доцент кафедры информатики и ИТ, РТ-СУ (Душанбе, Таджикистан); Arabov Mullosharaf Kurbonovich (Russian tajik slavonik University, Dushanbe, Tajikistan)

В частности, к системе вида (1) приводят дифференциальные уравнения второго порядка вида[1-2]:

$$y'' + ay' + by = c|y - \lambda|, \quad (2)$$

$$y'' + ay' + by = c|y' - \lambda|, \quad (3)$$

Как видно, уравнения (2) и (3) похожи друг на друга, но их решения имеют разное поведение. Например, для уравнения (2) существует предельный цикл, а для уравнения (3) такого поведения решений нет[2].

В работе [1] исследуется уравнение вида (2). И с помощью аналитических и компьютерных методов установлено что для него существует предельный цикл.

В рамках данной работы исследуем устойчивость решений уравнений вида [2].

Вводя обозначения $x_1 = x$, $x_2 = x'$ от уравнения (3) перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_2 - bx_1 - c|x_1 - \lambda|. \end{cases} \quad (4)$$

Стационарные решения (особые точки) системы (4) лежат на прямой $(x_1, 0)$, $x_1 \in R$ и определяются как решения уравнения

$$bx_1 + c|x_1 - \lambda| = 0$$

Теорема 1. Пусть $\lambda \neq 0$, $a > 0$ и $b - |c| > \frac{a^2}{4}$, тогда стационарные решения уравнения (2) устойчивы в целом.

Прежде чем привести доказательство этой теоремы в виде отдельных лемм сформулируем и докажем некоторые общие свойства уравнения (2) или системы (4).

Лемма 1. Если уравнение (2) имеет периодическое решение, отличное от стационарного решения, при некотором значении $\lambda = \lambda_0 > 0$ ($\lambda = \lambda_0 < 0$), то оно имеет периодическое решение, отличное от стационарного, при любом $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$).

Лемма 2. Пусть $a > 0$ и $b > |c| + \frac{a^2}{4}$. Тогда если нестационарное периодическое решение $y(t)$ уравнения (2) существует, то оно удовлетворяет условиям

$$\max_t y(t) > \lambda, \quad \min_t y(t) < -\frac{c\lambda}{b - c}.$$

при $\lambda > 0$ и условиям

$$\min_t y(t) < \lambda, \quad \max_t y(t) > \frac{c\lambda}{b + c},$$

если $\lambda < 0$.

Аналогичным образом для доказательства теоремы 1 приведем несколько теорем посредством которых доказывается теорема 1.

Литература

1. *Мухаммадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш.* Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка.-Уфимский математический журнал 2013. №4. С. 74-84.

2. *Арабов М.К., Шарифзода З.И.* Об устойчивости в целом особой точки кусочно-линейных уравнений второго порядка //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Дониш, 2017. - № 1/1. – С. 37-43

3. *Ахмедов Дж.Т.* О периодическом и ограниченном решении нелинейного уравнения второго порядка с фазовыми портретами // Докл. НАН Таджикистана, **63**:9-10 (2020), 579-585.