ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОКУСИРУЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

@ У.Б. Муминов, Р.К.Ибрагимов

umuminov153@gmail.com

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.21.

В работе методом обратной спектральной задачи интегрируется нелинейное уравнение Шредингера с дополнительными членами в классе бесконечнозонных периодических функций.

Ключевые слова: Дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ), оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

Integration of the nonlinear defocusing Schrodinger equation with additional terms

Short abstract. In this paper, the method of the inverse spectral problem is applied to the integration of the nonlinear Schrodinger equation with additional terms in the class of infinite-zone periodical functions.

Keywords: Defocusing nonlinear Schrodinger equation (DNUSH), Dirac operator, spectral data, system of Dubrovin equations, trace formulas.

В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2 + q^2) + a(t)[p^2(x_0, t) + q^2(x_0, t)]p_x + \\ \quad + \{b(t) + c(t)[p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t)]\} \cdot q, \\ q_t = p_{xx} - 2p(p^2 + q^2) + a(t)[p^2(x_0, t) + q^2(x_0, t)]q_x - \\ \quad - \{b(t) + c(t)[p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t)]\} \cdot p, \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях

$$p(x, t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R, \quad (1)$$

в классе действительных бесконечнозонных π - периодических по x функций:

$$p(x + \pi, t) = p(x, t), \quad q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad x \in R, t > 0,$$

Муминов Улугбек Бобомуродович, докторант СамГУ, (Самарканд, Узбекистан);
Muminov Ulugbek (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Ибрагимов Рашид Камилджанович, магистрант УргУ, (Ургенч, Узбекистан);
Ibragimov R.K. (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

$$p(x, t), q(x, t) \in C_x^2(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in C[0, \infty)$ - заданные непрерывные ограниченные функции, а $x_0, x_1 \in R$.

Хорошо известно, что одним из представителей интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, который имеет наибольшее число приложений, является нелинейные уравнения Шредингера (НУШ), которое впервые было проинтегрировано В.Е. Захаровым и А.Б. Шабадом [1] в классе "быстроубывающих" функций.

В работах А.Р. Итса [2], А.Р.Итса и В.П. Катлярова [3], а также А.О. Смирнова [4] исследовано нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) $iu_t = u_{xx} - 2|u|^2 \cdot u$, в классе конечнозонных функций.

В работе А.Б. Хасанова, М.М. Хасанова [5], было исследовано нелинейное уравнение Шредингера с дополнительным членом вида $u_t = 2i|u|^2 \cdot u - iu_{xx} + \gamma(t)|u(0, t)|^2 \cdot u_x$, в классе бесконечнозонных периодических функций. Следует отметить, что в работе [6] изучено вещественно-аналитическое решение нелинейного уравнения Шредингера вида $iu_t = Au_{xx} + B|u|^2 \cdot u + Cu$, где $A, B, C \in R$ - заданные константы, которые удовлетворяют условию $A \cdot B \neq 0$. В соответствии с физическим смыслом решений различают фокусирующий случай $AB > 0$ и дефокусирующий случай $AB < 0$.

Следуя [6] уравнение (1) относится к дефокусирующему случаю, т.к. $A = -1$, $B = 2$, ($AB = -2 < 0$). Заметим, что при $a(t) = 0, c(t) = 0$ и $b(t) = c = const$, система (1) примет вид

$$\begin{cases} q_t = p_{xx} - 2(p^2 + q^2)p - cp, \\ p_t = -q_{xx} + 2(p^2 + q^2)q + cq. \end{cases} \quad (4)$$

В данной статье предлагается алгоритм построения решения $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, задачи (1) – (3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv By' + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, x \in R, t > 0, \quad (5)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решения уравнения (5) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$. Функция $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (5).

Корни уравнений $\Delta(\lambda, \tau, t) = \pm 2$ обозначим через $\lambda_n(\tau, t)$, она совпадает с собственными значениями периодической и антипериодической задач $y(0, \tau, t) = \pm y(\pi, \tau, t)$ для уравнения (5).

Теперь рассмотрим задачу Дирихле

$$y_1(0, \tau, t) = 0, \quad y_1(\pi, \tau, t) = 0, \quad (6)$$

для уравнения (5). Первая компонента вектор-функции $s(x, \lambda, \tau, t)$ удовлетворяет первому граничному условию (6), подставляя его на второе граничное условие, получим $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$. Решая его относительно λ , находим собственное значение $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, задачи Дирихле (5), (6). Обозначим через $\sigma_n(\tau, t)$ знак:

$$\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}.$$

Множество $\{\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$ называется спектральными параметрами, а набор $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$ - спектральными данными оператора $L(\tau, t)$. Восстановление коэффициента $\Omega(x, t)$ оператора $L(\tau, t)$ по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент $\Omega(x, t)$ - оператора $L(\tau, t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$. Теперь с помощью начальной функций $p_0(x + \tau)$, $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau, 0)y = \lambda y, x, \tau \in R$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau, 0)$. Отсюда следует, что $\xi_n^0(\tau + \pi) = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau + \pi) = \sigma_n^0(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$. Основным результатом настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть пара $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, является решением задачи Коши (1) - (3). Тогда спектральные данные

$$\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$$

оператора $L(\tau, t)$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2) \quad & \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \cdot \{q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + \\ & + [p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)]^2 + \xi_n^2(\tau, t) - a(t)(p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t))[p^2(x_0, t) + \\ & + q^2(x_0, t)] + \frac{1}{2}[b(t) + c(t)(p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t))]\}, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}. \quad (8)$$

Знаки $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$\begin{aligned} p(\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), q(\tau, t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right), \quad (11)$$

систему дифференциальных уравнений (7) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1) – (3). Для этого сначала найдем спектральные данные λ_n , $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора $L(\tau, 0)$ соответствующие коэффициентам $p_0(x + \tau)$, $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$ через λ_n , $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Теперь в системе уравнения (7) с начальным условием (9) последовательно положим $\tau = x_0$ и $\tau = x_1$. Решая полученную задачу Коши, находим $\xi_n(x_0, t)$, $\sigma_n(x_0, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\xi_n(x_1, t)$, $\sigma_n(x_1, t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Затем из формулы следов (10), определим функции $p(x_0, t)$, $q(x_0, t)$, и $p(x_1, t)$, $q(x_1, t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнений (7) и решая задачу Коши (7) – (8) при произвольном значении τ , находим $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из формул следов (10), определим $p(\tau, t)$ и $q(\tau, t)$, т.е. решение задачи (1)– (3).

Литература

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 61:1 (1971), 118-134.

2. *Итс А.Р.* Обращения гиперэллиптический интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. Механ. Астрон., 7:2 (1976), 39-46.

3. *Итс А.Р., Котляров В.П.* Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН УССР. Сер.А., 1976, №11, 965-968.

4. *Смирнов А.О.* Эллиптические по t решение нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ, 107:2 (1996), 188-200.

5. *Хасанов А.Б., Хасанов М.М.* Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций. // ТМФ., 2019., т.199, №1, с.60-68.

6. *Домрин А.В.* О вещественно – аналогических решениях нелинейного уравнения Шрёдингера. Тр. ММО, 2014, т.75, вып.2, 205-218.

7. *Дубровин Б.А.* Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. // Функциональный анализ и его прил. – Москва, 1975. т.9. вып.3. с.41-51.