СМЕШАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ВЫРОЖДЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ

@ А.Ф. Шуклина, М.В. Плеханова

isaf@csu.ru, mariner79@mail.ru

УДК 517.977

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.47.

В работе рассматриваются задачи с двумя типами управляющего воздействия: распределенным и стартовым. Основные результаты касаются разрешимости задачи Коши для нелинейного уравнения с выделенной дробной производной Герасимова – Капуто.

Ключевые слова: смешанное управление, уравнение дробного порядка.

Mixed control of solutions to a degenerate nonlinear fractional equation

The paper considers tasks with two types of control action: distributed and initial. The main results concern the solvability of the Cauchy problem for a nonlinear equation with a distinguished Gerasimov - Caputo fractional derivative.

Keywords: mixed control, fractional-order equation.

Пусть $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{Z}$ компактно вложено в $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{U}$ — банахово пространство, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, (L, p) -ограниченный оператор, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, $F : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \rightarrow \mathcal{Z}$. Введём в рассмотрение пространство управлений $\mathcal{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой $\|(u, v)\|_{\mathcal{U}}^2 = \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^2 + \|v\|_{\mathcal{Z}^m}^2$. Рассмотрим задачу смешанного управления

$$LD_t^\alpha z(t) = Mz(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(r)}(t)) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \quad (1)$$

$$(Pz)^{(k)}(t_0) = v_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

$$(u, v) = (u, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \quad (3)$$

$$J(z, u, v) = \|z - z_d\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \delta \|u - u_d\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^q + \delta_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k - v_{dk}\|_{\mathcal{Z}}^2 \rightarrow \inf, \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-54003).

Шуклина Анна Фаридовна, к.ф.-м.н., доцент, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Anna Shuklina (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Плеханова Марина Васильевна, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Marina Plekhanova (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

где $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, $\mathcal{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$, J — некоторый функционал качества, при заданных $z_d \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathbb{Z})$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathfrak{U})$, $v_{dk} \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$, $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Решения задачи (1), (2) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{Z}) \equiv \left\{ z \in L_2(t_0, T; D_M) \cup C^{m-1}([t_0, T]; \mathbb{Z}) : \right. \\ \left. J_t^{m-\alpha} \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathbb{Z}) \right\}.$$

Назовем отображение $F : [t_0, T] \times \mathbb{Z}_1^m \rightarrow \mathbb{Z}_1$ локально липшицевым по $\bar{z} \in \mathbb{Z}_1$ равномерно по $t \in [t_0, T]$, если для любого $\bar{z} \in \mathbb{Z}_1$ существуют $\delta, l > 0$, такие, что при всех $\bar{y} \in \mathbb{Z}_1$, для которых $\sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathbb{Z}_1} < \delta$, для всех $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство

$$\|F(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) - F(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1})\|_{\mathbb{Z}_1} \leq l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathbb{Z}_1}.$$

Теорема 1. Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $r = m - 2$, отображение $F : (t_0, T) \times \mathbb{Z}_1^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\bar{z} \in \mathbb{Z}_1^{m-1}$, $F : (t_0, T) \times \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\bar{z} \in \mathbb{Z}^{m-1}$, при некотором $\bar{y} \in \mathbb{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot, \bar{y}) \in L_q(t_0, T; \mathbb{Z})$. Оператор M (L, p) -ограничен. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathfrak{U}) \times \mathbb{Z}^m$ содержит $(\tilde{u}, \tilde{v})$, для которого $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)B\tilde{u} \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathbb{Z})$, $D_t^\alpha(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)B\tilde{u} \in L_q(t_0, T; \mathbb{Z})$ при $k = 0, 1, \dots, p$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathbb{Z}_1)$. Тогда задача (1)–(4). имеет решение $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$.

Литература

1. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Научная книга: Новосибирск, 1999.
2. Plekhanova M.V. Degenerate distributed control systems with fractional time derivative // Ural Mathematical Journal, 2:2 (2016), 58-71.