О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $2 < Q < 3$

@ Г.Г. Петросян, М.С. Сорока

garikpetrosyan@yandex.ru, mariya.afanasowa@yandex.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.28.

Мы рассматриваем разрешимость периодической задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $2 < q < 3$ в банаховом пространстве, на основе метода функции Грина и теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений.

Ключевые слова: дифференциальное включение дробного порядка, полулинейное дифференциальное включение, периодическая задача, мера некомпактности, уплотняющий оператор.

On the solvability of the periodic problem for semilinear differential inclusions of fractional order $2 < q < 3$

We consider the solvability of the periodic problem for semilinear differential inclusions of fractional order $2 < q < 3$ in a Banach space, based on the Green's function method and topological degree theory for condensing multivalued maps.

Keywords: fractional-order differential inclusion, semilinear differential inclusion, periodic problem, measure of noncompactness, condensing operator.

Мы рассматриваем в сепарабельном банаховом пространстве E для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $q \in (2, 3)$ следующего вида:

$${}^C D^q x(t) \in \lambda x(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

существование решений, подчиняющихся периодическим условиям:

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad x''(0) = x''(T), \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения России в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук, проект МК-338.2021.1.1.

Петросян Гарик Гагикович, к.ф.-м.н., доцент, ВГПУ (Воронеж, Россия); Garik Petrosyan (Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia)

Сорока Мария Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, ВГПУ (Воронеж, Россия); Maria Soroka (Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia)

где ${}^C D^q$ – дробная производная Капуто, $\lambda > 0$ и $F: [0, T] \times E \rightarrow E$ – мультиотображение с выпуклыми компактными значениями, удовлетворяющее условиям:

(F1) для любого $\xi \in E$ мультифункция $F(\cdot, \xi): [0, T] \rightarrow E$ допускает измеримое сечение;

(F2) для п.в. $t \in [0, T]$ мультиоператор $F(t, \cdot): E \rightarrow E$ – полунепрерывный сверху;

(F3) существует функция $\alpha \in L_+^\infty[0, T]$, такая, что

$$\|F(t, \xi)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|\xi\|_E);$$

(F4) существует функция $\mu \in L^\infty([0, T])$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Delta \subset E$:

$$\chi(F(t, \Delta)) \leq \mu(t)\chi(\Delta),$$

для п.в. $t \in [0, T]$, χ – мера некомпактности Хаусдорфа в E .

Теорема 1. При выполнении условий (F1) – (F4), если

$$\frac{k}{\lambda} < 1,$$

где $k = \max \{\|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\}$, задача (1)–(2) имеет решение.

Литература

1. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И. Ко второй теореме Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференциальные уравнения, **10:3** (1974), 537.
2. Каменский М.И., Макаренко О.Ю., Нистри П. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Доклады Академии наук, **388:4** (2003), 439–442.
3. Каменский М.И., Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети // Доклады Академии наук, **368:2** (1999), 157–159.
4. Петросян Г.Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве // Уфимский математический журнал, **12:3** (2020), 71–82.
5. Gurova I.N., Kamenskii M.I. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations // Differential Equations, **32:1** (1996), 106–112.
6. Johnson R., Nistri P., Kamenskii M. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods // Journal of Differential Equations, **140:1** (1997), 186–208.
7. Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems // Journal of Dynamics and Differential Equations, **23:3** (2011), 425–435.

8. *Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V.* Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces // *Nonlinear Analysis*, **23**:3 (1993), 781-792.

9. *Kamenskii M., Zecca P., Obukhovskii V.* Optimal feedback control for a semilinear evolution equation // *Journal of Optimization Theory and Applications*, **82**:3 (1994), 503-517.

10. *Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C.* On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional-Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space // *Mathematics*, **7**:12 (2019), 5-19.

11. *Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C.* On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space // *Mathematics*, **9**:2 (2021), 136-154.

12. *Kamenskii M.I., Petrosyan G.G., Wen C.-F.* An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space // *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*, **5**:1 (2021), 155-177.

13. *Petrosyan G.* Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order // *The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics*, **34** (2020), 51-66.