ОБРАТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

@ Ф.С. Насыров

farsagit@yandex.ru

УДК 519.2

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.25.

Предложен метод решения обратного стохастического дифференциального уравнения с симметричным интегралом по произвольному случайному процессу с непрерывными реализациями.

Ключевые слова: симметричный интеграл, стохастический интеграл Стратоновича, обратное стохастическое дифференциальное уравнение.

Inverse stochastic differential equations with symmetric integral

A method is proposed for solving a backward stochastic differential equation with a symmetric integral over an arbitrary random process with continuous realizations.

Keywords: symmetric integrals, stochastic integral of Stratonovich, backward stochastic differential equations.

Пусть дано полное вероятностное пространство с фильтрацией

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P),$$

предполагается, что фильтрация (F_t) порождена случайным процессом $Q(s)$ с непрерывными реализациями. Рассматривается обратное стохастическое дифференциальное уравнение (*BSD-equation*) вида

$$\psi(T) - \psi(t) = \int_t^T D(s, \psi(s), (q)'_v(s, Q(s))) ds + \int_t^T q(s, Q(s)) * dQ(s), \quad (1)$$

$\psi(T) = h(T, Q(T))$, $t \in [0, T]$, здесь второй интеграл в правой части уравнения (1) есть симметричный интеграл по процессу $Q(s)$. Под решением уравнения (1) понимается пара согласованных с фильтрацией (F_t) процессов $(\psi(t), q(s, Q(s)))$, которые подчинены следующим условиям

- процесс $\psi(t)$ непрерывен с вероятностью 1;

Насыров Фарит Сагитович, д.ф.-м.н., профессор, УГАТУ (Уфа, Россия); Farit Nasyrov (Ufa State Aviation Technical University, Russia)

- процесс $q(s, Q(s))$ предсказуем и симметричный интеграл $\int_t^T q(s, Q(s)) * dQ(s)$ конечен;
- при подстановке процессов $(\psi(t), q(s, Q(s)))$ в уравнение (1) с вероятностью 1 оно обращается в тождество.

Фактически процесс $q(s, Q(s))$ играет роль управления, которое заставляет основной процесс $\psi(t)$ оставаться согласованным с фильтрацией (F_t) .

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

(a) детерминированная функция $D(t, \psi, r)$ и ее частные производные $D'_\psi(t, \psi, r)$ и $D'_r(t, \psi, r)$ непрерывны;

(b) $h(t, v)$ есть детерминированная функция с непрерывными частными производными $h'_t(t, v)$, $h'_v(t, v)$, $h''_{vv}(t, v)$ и $h''_{vt}(t, v)$;

(c) функции $D'_\psi(t, \psi, r)$ и $D'_r(t, \psi, r)$ удовлетворяют условию Липшица относительно переменной ψ с липшицевыми константами, не зависящими от t, ψ, r ;

(d) с вероятностью 1 $h'_t(t, Q(0)) \neq 0$ для всех $t \in [0, T]$.

Пусть $p(t)$ есть решение задачи

$$p' = G(t, p), \quad p(T) = 1,$$

где

$$G(t, p) = \frac{1}{h'_t(t, V(0))} [D'_\psi(t, h(t, V(0))p, h'_v(t, V(0))) h'_v(t, V(0))p + D'_r(t, h(t, V(0))p, h'_v(t, V(0))) h''_{vv}(t, V(0)) - h''_{tv}(t, v)p].$$

Тогда BSD-уравнение (1) имеет решение

$$\psi(t) = h(t, Q(t)) \cdot p(t), \quad q(t, Q(t)) = h'_v(t, Q(t)) \cdot p(t).$$

Литература

1. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и стохастический анализ. // Теория вероятностей и ее примен. 2006. **51**. N. 3. с. 496-517.
2. Насыров Ф.С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
3. Nasyrov F. S. The stochastic principle of maximum in the trajectory formulation. Abstracts of the 3rd international conference on stochastic methods. June 2-9, 2019, Divnomorskoye. Probability theory and its application. 2019. **64**. N. 1. p. 181.
4. Yong J., Zhou X. Y. Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. Springer-Verlag, New York, 1999.
5. Ma J., Yong J. Forward-backward stochastic differential equations and their applications. Springer, 1999.