ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ —ДУФФИНГА С ПОСТОЯННЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ АРГУМЕНТА

@ Д.С. Сафаров, С.К. Миратов

safarov-5252@mail.ru, safarkhonop@mail.ru

УДК 517.95

*DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.*33.

В работе найдено точное решение уравнения Ван дер Поля - Дуффинга с отклоняющимся аргументом с помощью эллиптической функции - дельта амплитуды - *dnu*.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, периодическое решение, отклонения аргумента, эллиптические функции.

Exact solution of the functional - differential van der Pol-Duffing equation with constant deviations of the argument

An exact solution of the Van der Pol - Duffing equation with a deviating argument using elliptic function - amplitude delta - *dnu*.

Keywords: Differential equation, periodic solution, argument deviations, elliptic functions.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка [1],[2]

$$\varphi''(t)-\alpha\varphi'(t)+\beta\varphi'(t+\tau_1)\varphi(t+\tau_2)\varphi(t+\tau_3)+a\varphi(t)+b\prod_{j=1}^{3}\varphi(t+h_j)=0, \quad (1)$$

где коэффициенты α, β, a, b и отклонения $\tau_j, h_j,\ j=\overline{1,3}-$ постоянные. Уравнение (1) при $\tau_1=\tau_2=\tau_3=0$ и $h_1=h_2=h_3=0$ примет вид

$$\varphi''(t)-\varphi'(t)(\alpha-\beta\varphi^2(t))+a\varphi(t)+b\varphi^3(t)=0. \quad (2)$$

Это уравнение, при $\alpha=\beta>0, b=0$, известно под названием уравнения Ван дер Поля, а при $\alpha=\beta=0, a\neq 0, b\neq 0$, как уравнение Дуффинга [3],[4].

Сафаров Джумабой, д.ф.-м.н., профессор, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Safarov Dzhumaboy (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Миратов С.К. , БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Miratov Safarkhon (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Очевидно, что уравнение (2) при $\alpha = \beta > 0$, и $a = -b$ допускает тривиальное решение $\varphi(t) = 1$.

Цель настоящей заметки является нахождение нетривиального ограниченного периодического решения уравнения (1), при некоторых значениях $\tau_j, h_j,\ j = \overline{1,3}$.

Если $\varphi(t)$ дважды дифференцируемое периодическое решение, с периодом $T > 0$, уравнения (1) и все отклонения τ_j, h_j- кратны T, то $\varphi(t)$ является решением уравнения (2).

К тому же, если не все τ_j- кратны T, например h_j, τ_1, τ_2-кратны T а τ_3- не кратен T, то $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi^{''}(t) - \varphi'(t)\left[\alpha - \beta\varphi(t)\varphi(t+\tau_3)\right] + a\varphi(t) + b\varphi^3(t) = 0. \tag{3}$$

В этом случае уравнения (1) и (3) называют функционально-эквивалентные системы, относительно периодической функции $\varphi(t), \varphi(t+T) = \varphi(t)$ [2]. Покажем, что при определенных значениях $\tau_j, h_j,\ j = \overline{1,3}$, решение уравнения (1) можно найти через решение уравнения Дуффинга

$$\psi''(t) + a\psi(t) + b\psi^3(t) = 0. \tag{4}$$

В монографии [4] решение уравнения (4) при $a > 0, b < 0$ найдено с помощью эллиптической функции Якоби - эллиптический синус - $Asnu$. Найдено явный вид амплитуда А, частота ω, и модуль функции $k, 0 < k^2 < 1$, через a, b

Как показано в [5], решение уравнения Дуффинга с постоянными отклонениями аргумента можно найти с помощью функции дельта-амплитуды

$$\varphi(t) = Adn(\omega t, k) = Adnu, \tag{5}$$

где $A-$ амплитуда, $\omega-$частота-колебания, $k-$ модуль функции.

Функция $Adnu$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi^{''}(t) - (2-k^2)\omega^2\varphi(t) + \frac{2\omega^2}{A^2}\varphi^3(t) = 0 \tag{6}$$

и имеет период $T = 2K(k)/\omega$, где$K(k)-$ полный эллиптический интеграл первого рода [4], а на полупериоде K удовлетворяет функциональному соотношению

$$\varphi(u+K)\varphi(u) = k', \tag{7}$$

$k'-$ дополнительный модуль для $k,\ k^2 + k'^2 = 1,\ 0 < k'^2 < 1$.

Теперь отыскиваем решение уравнения (1) в виде (5), при условии, что модуль функции k^2- известно и все числа $\omega\tau_1, \omega\tau_3, \omega\tau_j, j = \overline{1,3}$ кратны периоду $2K(k),\ \ \omega\tau_3 = K(k)$ и $a < 0, b > 0$.

Теорема. *Пусть в уравнении (1) все коэффициенты* α, β, a, b *отличны от нуля* $a < 0, b > 0$, $\alpha b < -a\beta$, *и модуль функции* k^2 *и ее амплитуда* ω^2 *вычислены формулами*

$$k^2 = (1 - (B - \sqrt{B^2 - 1}))^2, \quad B = -a\beta/\alpha b, \ B > 1 \ \textit{и} \quad \omega^2 = -a(2 - k^2).$$

Тогда уравнение (1) при условии, что $\omega\tau_1, \ \omega\tau_2, \ \omega h_j, \ j = \overline{1,3}$ *кратны* $2K(k)$ *и* $\omega\tau_3 = K(k)$, *допускает однопараметрические ограниченные периодические решения вида*

$$\varphi(t) = \pm\sqrt{-\frac{2a}{b(2-k^2)}}dn\left[\sqrt{-\frac{2a}{2-k^2}}t, k\right].$$

Литература

1. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргуметом. - М., Наука, 1971.- 296с.

2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1984г.

3. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы в нелинейной механике. - М., Наука, 1981.

4. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций. – М., Наука, 2006.

5. *Сафаров Д.С., Миратов С.К.* О решение уравнения Дуффинга с многими постоянными отклонениями аргумента. - Вестник БГУ. - 2019. - 2/2 (63). - С. 12-16.