ПОСТРОЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЙ ЗАДАННУЮ ГРУППУ ЛИ

@ Т. Эргашбоев, Д.А. Воситова, М.Ш. Набиева

vositova.dilorom@mail.ru, manzura.nabieva.2014@mail.ru

УДК 517.91

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.49.

В работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее группу Ли. По заданной группе выводится общий вид таких уравнений.

Ключевые слова: Группа преобразований, оператор группы, инвариант, дифференциальное уравнение, инвариантное уравнение.

Constructions of the ordinary differential equation of the second order, admitting a given Lie group

The paper considers an ordinary differential equation of the second order admitting a lie group. For a given group, the general form of such equations is displayed.

Keywords: Transformation group, group operator, invariant, differential equation, invariant equation.

Пусть

$$(\bar{x}, \bar{y}) = T_a(x, y) = (\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a)), \quad (1)$$

группа преобразований G плоскости R^2 ($a \in \Delta \subset R$) и

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

оператор группы (1), где $\xi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right|_{a=0}$, $\eta = \left. \frac{\partial \psi}{\partial a} \right|_{a=0}$ ([1], §1. с. 4-6).

Функция $F(x, y)$ называется инвариантом группы (1), если выполнено условие $F(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y)$. Функция $F(x, y)$ является инвариантом группы (1) тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$XF = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Эргашбоев Турсунбой, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа имени проф. А.Мухсинова, ГОУ ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Ergashboev Tursunboy (B.Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Воситова Дилором Абдурасуловна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа имени проф. А.Мухсинова, ГОУ ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Vositova Dilorom (B.Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Набиева Манзура Шокировна, преподаватель кафедры математического анализа имени проф. А.Мухсинова, ГОУ ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Nabieva Manzura (B.Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (2)$$

Инвариантность дифференциального уравнения (2) связана с оператором $X_2 = X_1 + \varsigma_2 \frac{\partial}{\partial y''}$, где

$$X_1 = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \varsigma_1 \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (3)$$

здесь $\varsigma_1 = D(\eta) - y'D(\xi)$, $\varsigma_2 = D(\varsigma_1) - y''D(\xi)$.

Уравнение (2) инвариантно тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$X_2 F = X_1 F + \varsigma_2 \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \quad (4)$$

Составляя характеристическое уравнение находим инвариант группы G [1, с. 7]. Рассмотрим реализации этих результатов на конкретном примере.

Пример. Пусть задан оператор группы преобразований плоскости

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

Найдем общий вид дифференциального уравнения второго порядка, допускающий группу преобразований $\bar{x} = xe^a$, $\bar{y} = ye^a$. Так как $\xi = x$, $\eta = y$ и $\varsigma_1 = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y = 0$, то составляя характеристическое уравнение для (3) находим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dy'}{0}.$$

Тогда инвариант $u(x, y) = J_0(x, y) = \frac{y}{x}$ нулевого, а $\vartheta(x, y) = y'$ инвариант первого порядка. Так как $\varsigma_2 = D(\varsigma_1) - y''D(\xi) = -y''$, то $J_2 = xy''$ инвариант второго порядка, который находится из характеристического уравнения для (4). Тогда уравнение $xy'' = F\left(\frac{y}{x}, y'\right)$ является дифференциальным уравнением второго порядка, инвариантное относительно группы $\bar{x} = xe^a$, $\bar{y} = ye^a$.

Литература

1. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. – М.: Знание, 8/1989
2. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Знание, 7/1991.