ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

@ Ф.В. Лубышев, М.Э. Файрузов

fairuzovme@mail.ru

УДК 519.632.4

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.88.

В работе предлагается итерационный метод для решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа. Исследованы вопросы сходимости итерационного процесса, установлены оценки скорости сходимости итераций.

Ключевые слова: итерационный метод, оптимальное управление, краевая задача, эллиптическое уравнение, сходимость итерационного метода.

On an iterative method for solving the optimal control problem for an elliptic-type system

The paper proposes an iterative method for solving the optimal control problem for an elliptic system. The issues of convergence of the iterative process are investigated, estimates of the rate of convergence of iterations are established.

Keywords: iterative method, optimal control, boundary value problem, elliptic equation, convergence of the iterative method.

Рассмотрим задачу оптимального управления, состоящую в том, чтобы найти такое управление $u = u_*(x) \in U = L_2(\Omega)$, которое минимизирует на множестве управлений U функционал цели

$$J(u) = \int_{\Omega} (T(x, u) - T_0(x))^2 d\Omega + \gamma \|u(x)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad (1)$$

причем связь управления $u = u(x)$ с состоянием процесса управления $T(x) = T(x, u)$, соответствующий управлению $u \in U$, определяется как решение задачи Дирихле в $\Omega \in \mathbb{R}^2$:

$$LT(x, u) = -\Delta T(x, u) = -\left[\frac{\partial^2 T(x, u)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T(x, u)}{\partial x_2^2} \right] = u(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

Лубышев Федор Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Fedor Lubyshv (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Файрузов Махмут Эрнстович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Mahmut Fayruzov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

$$T(x, u) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (3)$$

здесь Ω – область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Иначе говоря, задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию (управление) такую, что

$$u_* \in U = L_2(\Omega), \quad J(u_*) = \inf_{u \in U} J(u). \quad (4)$$

Элемент $u_* \in U$, удовлетворяющий условию (4), называется оптимальным управлением, а совокупность U_* всех элементов u_* , удовлетворяющих (4) называется множеством оптимальных управлений [1]–[4]. В функционале (1) функция $T_0(x)$ – заданный элемент пространства $L_2(\Omega)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы элемент $u_* \in U = L_2(\Omega)$ был оптимальным управлением задачи (1)–(4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия оптимальности вида*

$$LT(x, u_*) = -\Delta T(x, u_*) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x, u_*), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$T(x, u_*) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (6)$$

$$L\psi(x, u_*) = -\Delta\psi(x, u_*) = T(x, u_*) - T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$\psi(x, u_*) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (8)$$

$$\psi(x, u_*) + \gamma u_* = 0, \quad x \in \Omega. \quad (9)$$

В работе было показано, что оптимальное управление единственно, т.е. соотношениям (5)–(9) удовлетворяет единственный элемент $u_* \in U = L_2(\Omega)$. Так что оптимальное управление $u_*(x)$ находится по следующему правилу: 1) решается граничная задача для системы уравнений с частными производными (5)–(8); 2) находится оптимальное управление по формуле

$$u_*(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x, u_*), \quad x \in \Omega.$$

Рассмотрим последовательность управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемую формулой

$$u_*^{(n)}(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где последовательность $\{\psi^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется из итерационного процесса (приближенного решения системы уравнений в частных производных (5)–(8):

$$-\Delta T^{(n+1)}(x) = -\Delta T^{(n)}(x) - \tau \left[LT^{(n)}(x) + \frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x) \right], \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

$$T^{(n+1)}(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$-\Delta \psi^{(n)}(x) = T^{(n)}(x) - T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

$$\psi^{(n)}(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (13)$$

Здесь $\tau > 0$, $\gamma > 0$ – параметры, которыми следует распорядиться для достижения сходимости последовательности управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

В работе исследованы вопросы сходимости итерационного процесса (10)-(13), установлены оценки скорости сходимости итераций.

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. 414 с.
2. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. — М.: Наука, 1987. 368 с.
3. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
4. *Лубышев Ф. В.* Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — Уфа: БашГУ, 1999. 244с.