МЕТОД ТИПА РОЗЕНБРОКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

@ А.М. Ефимов, Д.И. Аптыкаева

a.efimov.bashedu@yandex.ru, diana.aptykaeva@mail.ru

УДК 519.622

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.71.

Строится L -устойчивый метод типа Розенброка четвертого порядка точности, в котором промежуточные формулы также L -устойчивые.

Ключевые слова: жесткая система, метод Розенброка

Rosenbrock type method of the fourth order with complex parameters

An L -stable method of the Rosenbrock type of the fourth order of accuracy is constructed, in which the intermediate formulas are also L -stable.

Keywords: stiff system, Rosenbrock method

Довольно часто при решении задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений применяют различные варианты методов типа Розенброка [1-4].

В работе для численного решения задачи Коши

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x(t_0) = x_0$$

рассматривается метод типа Розенброка четвертого порядка

$$x_{n+1} = x_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3 + p_4 k_4,$$

$$D_n k_1 = \tau \varphi(x_n),$$

$$D_n k_2 = \tau \varphi(x_n + \beta_{21} k_1),$$

$$D_n k_3 = \tau \varphi(x_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2),$$

$$D_n k_4 = \tau \varphi(x_n + \beta_{41} k_1 + \beta_{42} k_2 + \beta_{43} k_3),$$

где $D_n = E - \alpha \tau \varphi'_n$, E — единичная матрица, $\varphi'_n = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_n)$ — якобиан системы, α, p_i, β_{ij} — числовые коэффициенты.

Ефимов Андрей Михайлович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия), Институт Нефтехимии и Катализа РАН (Уфа, Россия); Andrey Efimov (Bashkir State University, Ufa, Russia), (Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia);

Аптыкаева Диана Игоревна, магистрант, БашГУ (Уфа, Россия); Diana Aptykaeva (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Следуя схеме определения параметров метода, изложенной Е. А. Новиковым в [4], приходим к уравнению

$$6\alpha^4 + 18\alpha^2 + \frac{1}{4} = 4(6\alpha^3 + \alpha),$$

корнями которого являются

$$\alpha_1 \approx 0.106439, \alpha_2 \approx 0.220428, \alpha_3 \approx 0.572816, \alpha_4 \approx 3.10032$$

Наиболее подходящим корнем для указанного выше метода является $\alpha_3 \approx 0.572816$. Определение оставшихся параметров метода по схеме Е. А. Новикова дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.572816, \\ p_1 &= 0.572816, \quad p_2 = 0.281649 \pm 0.00503726i, \\ p_3 &= 0.0336418 \mp 0.0268835i, \quad p_4 = 0.111893 \pm 0.0218462i, \\ \beta_{21} &= 0.572816, \\ \beta_{31} &= 0.572816, \quad \beta_{32} = -2.98883 \pm 1.27971i, \\ \beta_{41} &= 0.572816, \quad \beta_{42} = -2.09751 \mp 0.580976i, \quad \beta_{43} = -0.273906 \mp 0.0588767i, \end{aligned}$$

откуда, естественно, получаем комплекснозначное решение для задачи Коши. Однако, следует отметить, что, несмотря на нелинейность системы дифференциальных уравнений в общем случае, вещественная часть решения для проведенных расчетов по нескольким задачам химической кинетики неплохо согласуется с опытными данными, а сам метод в его реализации с автоматическим выбором длины шага дает неплохое сокращение количества итераций по сравнению с методом, изложенным Е. А. Новиковым в [4], незначительно проигрывая ему по времени расчетов.

Литература

1. *Rosenbrock H.H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer, 1963. Vol. 5, no. 4. pp. 329–330.
2. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems / Springer Series in Computational Mathematics. Vol. 14. Berlin: Springer-Verlag, (1996). 614 pp.; русск. пер.: *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, (1999). 685 с.
3. *Артемьев С.С.* Построение полуневяных методов Рунге–Кутты // Докл. АН СССР, (1976), т. 228, №4, — 776–778.
4. *Новиков Е.А.* Метод типа Розенброка третьего порядка с внутренней L -устойчивостью // Информатика и системы управления, (2015), №1(43), — 54–62.