О ГОМОТОПИЧЕСКИХ КЛАССАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

© Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов

emuhamadiev@rambler.ru, naimovan@vogu35.ru

УДК 517.938.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.24.

В работе исследована задача описания гомотопических классов множества $\mathcal{F}$ положительно однородных гладких функций от трех переменных, градиенты которых не обращаются в ноль в ненулевых точках. Каждой функции $f \in \mathcal{F}$ сопоставлено дерево (конечный связный граф без циклов) $Tr(f)$, вершины которого отмечены чередующимися знаками $+$ и $-$. Доказано, что две функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ принадлежат одному гомотопическому классу тогда и только тогда, когда соответствующие им деревья $Tr(f_1)$ и $Tr(f_2)$ изоморфны с сохранением знаков вершин.

Ключевые слова: положительно однородная функция, гомотопический класс, дерево функции

Homotopy classes of positively homogeneous functions in three variables

The paper investigates the problem of describing homotopy classes the set $\mathcal{F}$ of positively homogeneous smooth functions of three variables whose gradients do not vanish at non-zero points. Each function $f \in \mathcal{F}$ is associated with a tree (finite connected graph without cycles) $Tr(f)$, the vertices of which are marked with alternating signs $+$ and $-$. It is proved that two functions $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ belong to the same homotopy class if and only if the corresponding trees $Tr(f_1)$ and $Tr(f_2)$ are isomorphic with preservation of the vertex signs.

Keywords: positively homogeneous function, homotopy class, function tree

Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям

- a) $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R}^1)$;
- b) $f(\lambda x) \equiv \lambda^m f(x) \forall \lambda > 0$, где $m = m(f) \neq 0$;
- c) $\nabla f(x) \neq 0 \forall x \neq 0$, где $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$.

Две функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ называются гомотопными, если существует семейство функций $f(\cdot, t) \in \mathcal{F}$, $t \in [0, 1]$, непрерывно зависящее от t и

Мухамадиев Эргашбой, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Ergashboy Mukhamadiev (Vologda State University, Vologda, Russia)

Наимов Алижон Набиджанович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Alizhon Naimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

такое, что $\tilde{f}(\cdot, 0) = f_1$, $\tilde{f}(\cdot, 1) = f_2$. Бинарное отношение гомотопности является отношением эквивалентности, и поэтому множество $\mathcal{F}$ разбивается на гомотопические классы.

В настоящей работе исследована задача описания гомотопических классов множества $\mathcal{F}$: при каких условиях две функции из $\mathcal{F}$ принадлежат одному гомотопическому классу?. Данная задача представляет интерес при исследовании периодических и ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью [1].

В работе [2] доказано, что любая функция из $\mathcal{F}$ гомотопна некоторой функции вида $g(x) = |x|^\nu (\langle c_1, x \rangle - d_1 |x|) \cdot \dots \cdot (\langle c_p, x \rangle - d_p |x|)$, где $|x|^2 = \langle x, x \rangle$, $\langle x, y \rangle$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. При этом вопрос о гомотопности двух произвольных функций из $\mathcal{F}$ остается открытым.

Каждой функции $f \in \mathcal{F}$ сопоставим конечный граф $Tr(f)$, вершинами которого являются связные компоненты множества

$$\Omega_0^c(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1, f(x) \neq 0\},$$

и две связные компоненты считаем смежными, если их границы пересекаются. Каждую вершину графа $Tr(f)$ отметим знаком $+$ или $-$, если f положительна или отрицательна на этой вершине. Очевидно, граф $Tr(f)$ связный и число его ребер на одну единицу меньше, чем число вершин. Следовательно, $Tr(f)$ является деревом. В силу условия с) любые две смежные вершины дерева $Tr(f)$ имеют противоположные знаки. Более того, знаком одной вершины однозначно определяются знаки остальных вершин.

Два конечных дерева, вершины которых отмечены знаками $+$ или $-$, назовем изоморфными с сохранением знаком вершин, если существует взаимно однозначное соответствие (отображение) между их множествами вершин при котором смежность вершин и знаки вершин сохраняются.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Две функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ принадлежат одному гомотопическому классу тогда и только тогда, когда соответствующие им деревья $Tr(f_1)$ и $Tr(f_2)$ изоморфны с сохранением знаков вершин*

Теорема 2. *Любое конечное дерево, вершины которого отмечены чередующимися знаками $+$ и $-$, соответствует какой-либо функции $f \in \mathcal{F}$, т.е. совпадает с $Tr(f)$.*

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathcal{F}$ и $p_+(f)$, $p_-(f)$ – число положительных и отрицательных вершин дерева $Tr(f)$. Тогда вращение $\gamma(\nabla f)$ градиента ∇f на единичной сфере $|x| = 1$ можно находить формулой*

$$\gamma(\nabla f) = p_+(f) - p_-(f). \quad (1)$$

Таким образом, множество функций $\mathcal{F}$ разбивается на счетное число гомотопических классов и каждый гомотопический класс однозначно определяется одним конечным деревом с вершинами отмеченными чередующимися знаками $+$ и $-$.

Формула (1) выведена из формулы

$$\gamma(\nabla f) = 1 - \chi(\overline{\Omega_-(f)}), \quad (2)$$

анонсированной в работе [3], где $\chi(\overline{\Omega_-(f)})$ – характеристика Эйлера замыкания множества

$$\Omega_-(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1, f(x) < 0\}.$$

Литература

1. *Мухаммадиев Э., Наимов А.Н.* Критерии существования периодических и ограниченных решений для трехмерных систем дифференциальных уравнений // Тр. ИММ УрО РАН, **27**:1 (2021), 157-172.
2. *Mukhamadiev E., Naimov A.N.* On the homotopy classification of positively homogeneous functions of three variables // Issues Anal., **10(28)**:2 (2021), 67-78.
3. *Мухаммадиев Э.* Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. РАН, **351**:5 (1996), 596-598.