ОПЕРАТОР ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ АЛГЕБРЫ ЛИ КОНТАКТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

@ Р.В. Исхакова, А.А. Гайнетдинова

iskhakova@mail.ru, gajnetdinova.aa@ugatu.su

УДК 517.91

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.17.

Исследуется вопрос о построении оператора инвариантного дифференцирования для алгебр Ли контактных преобразований и применимость метода понижения порядка к обыкновенным дифференциальным уравнениям, допускающим такие алгебры Ли.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, алгебра Ли, контактные преобразования, дифференциальные инварианты, оператор инвариантного дифференцирования

The invariant differentiation operator for the Lie algebra of contact transformations

We study the question of constructing an operator of invariant differentiation for Lie algebras of contact transformations and the applicability of the order reduction method to ordinary differential equations that admit such Lie algebras.

Keywords: ordinary differential equations, Lie algebra, contact transformations, differential invariants, invariant differentiation operator

Множество математических моделей различных процессов описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Несмотря на развитие численных методов, аналитические методы решения ОДУ играют важную роль в исследовании свойств моделей. Одним из таких методов является метод последовательного понижения порядка с использованием симметрий уравнения.

Модификация метода понижения порядка, описанная в [1, 2], использует теорию дифференциальных инвариантов допускаемой алгебры Ли, в частности – оператор инвариантного дифференцирования (ОИД) (см. [3, 4]). Эта модификация предполагает, что количество точечных симметрий системы ОДУ совпадает с её порядком. Однако часто бывает так, что уравнение допускает недостаточное число точечных симметрий. В этом случае можно рассмотреть ее нелокальные симметрии [5].

Исхакова Розалина Валеевна, студент, УГАТУ (Уфа, Россия); Rozalina Iskhakova (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

Гайнетдинова Алия Айдаровна, к.ф.-м.н., УГАТУ (Уфа, Россия); Aliya Gainetdinova (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

В данной работе исследуется вопрос понижения порядка уравнения P -го порядка вида

$$y^{(P)} = f(x, y, y', \dots, y^{(P-1)}), \quad (1)$$

допускающее P -мерную алгебру Ли контактных симметрий, натянутую на операторы

$$X_i = \xi_i(x, y, y') \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y}, i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где x - независимая переменная, $\xi_i(x, y, y'), \eta_i(x, y, y')$ - изветные функции.

Пусть ранг матрицы $M^{(P)}$, составленной из координат операторов $X_i^{(P)}$, полученных продолжением операторов (2) на все производные до P -го порядка, равен P . Тогда ОДУ (1) можно представить через инвариант P -го порядка $I^{(P)} = I^{(P)}(x, y, y', \dots, y^{(P)})$ и дифференциальный инвариант $I^{(k)} = I^{(k)}(x, y, y', \dots, y^{(k)})$ k -го порядка ($0 \leq k < P$) допускаемой алгебры Ли в виде

$$I^{(P)} = F(I^{(k)}).$$

где F - некоторая функция.

Согласно [1,2] функцию $\lambda = \lambda(x, y', \dots, y^{(P)})$ для ОИД λD_x следует строить в специальном виде

$$\lambda = \frac{1}{D_x(\Phi)}, \quad (3)$$

где $\Phi = \Phi(x, y, \dots, y^{(P-1)})$ - некоторая функция, являющаяся дифференциальным инвариантом разрешимой подалгебры исходной алгебры Ли. В работах [1, 2] приведена схема построения этой функции Φ для алгебр Ли точечных преобразований, а в работе [6] показано, что в случае алгебр Ли контактных преобразований схема не терпит изменений.

Применение построенного ОИД к инварианту младшего порядка даёт соотношение

$$\lambda D_x(I^{(k)}) = H(I^{(k)}, I^{(P)}),$$

где $H = H(I, \dots, I^{(P)})$ - некоторая гладкая функция. Получившееся выражение рассматривается на многообразии, определяемом исследуемым уравнением (1):

$$\lambda D_x(I^{(k)})|_{(1)} = G(I^{(k)}),$$

здесь $G(I^{(k)}) = H(I^{(k)}, F(I^{(k)}))$ - гладкая функция.

Таким образом, построено ОДУ первого порядка

$$\frac{dI^{(k)}}{d\Phi} = G(I^{(k)}).$$

Интегрируя это уравнение, получим решение вида $U(\Phi, I^{(k)}) = C, C = \text{const}$, которое является первым интегралом исходного уравнения (1).

К полученному уравнению $(P-1)$ -го порядка применяется та же процедура при условии возможности построения ОИД со множителем специального вида (3).

Из вышесказанного следует, что описанный метод понижения порядка не зависит от пространства, в котором реализована допускаемая алгебра Ли, но зависит от структуры этой алгебры Ли.

Литература

1. *Гайнетдинова А.А.* Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, размерность алгебры точечных симметрий которых совпадает с порядком системы // дис. канд. ф.-м. н. — Уфа. — 2019. — 113.
2. *Газизов Р.К., Гайнетдинова А.А.* Оператор инвариантного дифференцирования и его применение для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал. — 2017. — Т. 9, № 4. — 12–21.
3. *Полянин А.Д.* Элементарная теория использования инвариантов для решения математических уравнений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2008. — № 6 (65). — 152–176.
4. *Гончаровский М. М.* Дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования проецируемого действия групп Ли // ТМФ. — 2015. — Т. 183, № 2. — 202–221.
5. *Ахатов И. Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., 34. — Москва. — 1989. — 3–83.
6. *Исхакова Р.В.* Алгоритм понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих алгебру Ли контактных симметрий // Выпускная квалификационная работа. — Уфа. — 2021. — 42.