К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

@ Дж.Т. Ахмедов, И.Дж. Нуров

jovidon-a.90@mail.ru, nid1@mail.ru

УДК 517.91

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.8.

В работе исследуются вопросы о существовании периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Получены новые условия возникновения периодических решений. Используются методы функционального анализа, как гомотопия и вращения вполне непрерывных векторных полей.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, гомотопия, вращение векторных полей.

On the question of periodic solutions of a second-order nonlinear differential equation

The paper investigates questions about the existence of periodic solutions of nonlinear second-order differential equations. New conditions for the emergence of periodic solutions are obtained. Methods of functional analysis are used, such as homotopy and rotation of completely continuous vector fields.

Keywords: differential equation, periodic solution, homotopy, rotation of vector fields.

Настоящий доклад посвящен анализу периодических решений системы нелинейного дифференциального уравнения вида

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -g(x_1, x_2) + f(t, x_1, x_2). \quad (1)$$

где функция $g(y, z)$ - непрерывна и положительно однородна первого порядка: $g(\lambda y, \lambda z) = \lambda g(y, z)$, $\lambda > 0$, а $f(t, y, z)$ -непрерывная функция, определенная при всех значениях t, y, z и удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sup_{t, |y|+|z| \leq r} |f(t, y, z)| = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Республики Таджикистан (проект № 0117ТJ00807).

Ахмедов Джовидон Толибович, старший преподаватель, ТНУ (Душанбе, Таджикистан); Jovidon Ahmedov (Tajik national University, Dushanbe, Tajikistan)

Нуров Ишхокбой Джумаевич, д.ф.-м.н., профессор, ТНУ (Душанбе, Таджикистан); Iskhokboi Nurov (Tajik national University, Dushanbe, Tajikistan)

Следует отметить, что отыскание T -периодических решений системы (1) эквивалентно нахождению решений системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(T) + \int_0^t x_2(s)ds, \\ x_2(t) &= x_2(T) - \int_0^t [g(x_1(s), x_2(s)) - f(s, x_1(s), x_2(s))]ds. \end{aligned} \quad (3)$$

в пространстве $C[0, T]$ — непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций. Наряду системой (3) рассмотрим системы [1]

$$x_1(t) = x_1(T) + \int_0^t x_2(s)ds, \quad x_2(t) = x_2(T) - \int_0^t g(x_1(s), x_2(s))ds. \quad (4)$$

В этом пространстве рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей $\Phi(x, \lambda) = (x(t) - A(x(t), \lambda),$ где

$$\begin{aligned} A(x(t), \lambda) &= (x_1(T) + \int_0^t x_2(s)ds, \\ & x_2(T) - \int_0^t [g(x_1(s), x_2(s)) - \lambda f(s, x_1(s), x_2(s))]ds), \end{aligned}$$

зависящее от параметра $\lambda \in [0, 1]$. Нули поля $\Phi(x, 1)$ совпадают с решением системы (3), а $\Phi(x, 0) = (x(t) - Ax(t), Ax(t) = A(x(t), 0))$.

Лемма 1. Пусть система (4) не имеет ненулевых решений. Тогда векторное поле $\Phi(x, 1)$, соответствующее системе интегральных уравнений (3), не имеет нулей на сфере $S(R)$ достаточно большого радиуса R и для его вращения $\gamma(\Phi(\cdot, 1), S(R))$ справедливо равенство $\gamma(\Phi(\cdot, 1), S(R)) = \gamma(\Phi(\cdot, 0), S(R)) = \text{ind}(\Psi, \theta)$, где

$$\Psi x = (-T \cdot x_2, \quad T \cdot g(x_1, x_2)) \quad x \in E^2.$$

Лемма 2. Пусть $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) < 0$. Тогда $\text{ind}(\Psi, 0) = (\text{sign}g(1, 0) - \text{sign}g(-1, 0))/2$.

Теорема 1. Пусть $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) < 0$ и кроме того системы (4) не имеет ненулевых решений. Тогда уравнение (1) имеет T -периодическое решение для любой функции $f(t, y, z)$ удовлетворяющей условию (2).

Заметим, что, если $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) \neq 0$, то для существования T -периодических решений уравнения (1) при любой функции f удовлетворяющей условию (2) условие $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) < 0$ необходимо. Действительно, если $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) > 0$, то для функции $f(t, y, z) \equiv -g(1, 0)/(1 + |y|)$, которая, очевидно, удовлетворяет условию (2), уравнение (1) не имеет периодических решений.

Если функция $g(x, y)$ удовлетворяет условию $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) > 0$, то в множестве функций $f(t, y, z)$, удовлетворяющих условию (2), можно выделить подмножество, для которого существует ненулевое T –периодическое решение уравнения (1). Для простоты изложения ограничимся рассмотрением функции, удовлетворяющей условию (2) и при некоторых $a > 0$, $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \max_{|y|, |z| \leq 1, t} \left| \frac{f(t, ry, r^{1-\sigma} z)}{r^\alpha} - ay|y|^{\alpha-1} \right| = 0, \quad \sigma = (1 + \alpha)/2. \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть система (4) не имеет ненулевых решений и $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) > 0$, а функция $f(t, y, z)$ удовлетворяет условию (2) и при некоторых $a > 0$, $0 < \alpha < 1$ условию (5). Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно ненулевое T –периодическое решение.

Литература

1. Ахмедов Дж. Т. О периодическом и ограниченном решении нелинейного уравнения второго порядка с фазовыми портретами // Докл. НАН Таджикистана, **63**:9-10 (2020), 579-585.