АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

@ С.В. Акманова

svet.akm_74@mail.ru

УДК 517.938

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.3.

В работе рассматривается общего вида непрерывно-дискретная динамическая система, задающаяся нелинейными уравнениями, и имеющая постоянный шаг дискретизации. Выявлены и доказаны условия асимптотической устойчивости нулевого решения такой системы, а также некоторые особенности её бифуркационного поведения.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, собственные значения матрицы, точка равновесия, асимптотическая устойчивость, бифуркация.

Asymptotic stability and bifurcations of nonlinear continuous-discrete dynamical systems

The paper considers a general form of a continuous-discrete dynamic system, given by nonlinear equations, and having a constant discretization step. The conditions of asymptotic stability of the zero solution of such a system, as well as some features of its bifurcation behavior, are identified and proved.

Keywords: continuous-discrete system, matrix eigenvalues, the equilibrium point, asymptotic stability, bifurcation.

Рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная система

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k)), \end{cases} \quad (1)$$

где $x, y \in R^1, t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots, h = t_{k+1} - t_k > 0, f, g$ - непрерывно дифференцируемые функции такие, что $f(0, 0) = 0, g(0, 0) = 0$. Величина $h > 0$ предполагается постоянной, т.е. не зависит от k .

Тогда система (1) имеет точку равновесия $x^* = y^* = 0$. Раскладывая по формуле Тейлора нелинейности $f(x, y), g(x, y)$ в окрестности данной

Акманова Светлана Владимировна, к.п.н., доцент, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова (Магнитогорск, Россия); Svetlana Akmanova (Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia)

точки равновесия, перейдём от (1) к равносильной системе

$$\begin{cases} x'(t) = a_1 x(t) + b_1 y_k + a(x(t), y_k), \\ y_{k+1} = a_2 x_{k+1} + b_2 y_k + b(x_{k+1}, y_k), \end{cases} \quad (2)$$

где $y_k = y(t_k)$, $x_k = x(t_k)$, $a_1 = f'_x(0, 0)$, $b_1 = f'_y(0, 0)$, $a_2 = g'_x(0, 0)$, $b_2 = g'_y(0, 0)$, $a(x, y) = O(|x|^2 + |y|^2)$, $b(x, y) = O(|x|^2 + |y|^2)$ при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Положим

$$A = \begin{bmatrix} e^{a_1 h} & b_1(e^{a_1 h} - 1)/a_1 \\ a_2 e^{a_1 h} & a_2 b_1(e^{a_1 h} - 1)/a_1 + b_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть собственные значения матрицы (3) по модулю меньше 1, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Если хотя бы одно собственное значение матрицы (3) по модулю больше 1, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Особое внимание в докладе уделим случаям, когда $a_1 < 0$ и $|b_2| < 1$. Тогда нулевые точки равновесия систем

$$x'(t) = a_1 x(t), \quad (4)$$

$$y_{k+1} = b_2 y_k, \quad (5)$$

асимптотически устойчивы (см., например, [1]). Однако при переходе от систем (4) и (5) к непрерывно-дискретной системе (2) может измениться характер устойчивости нулевых точек равновесия этих систем, что может привести к различным бифуркациям системы (2).

Для детального изучения особенностей бифуркаций системы (1) на основе системы (2) в окрестности точки $x^* = y^* = 0$ положим, что $a_1 = -1$ и $b_2 = \frac{1}{2}$, при этом в качестве бифуркационного параметра будем рассматривать величину h . Тогда с учётом [2, 3] справедливы

Теорема 2. Если $a_2 b_1 = \frac{1}{2}$, то любое значение $h > 0$ является точкой бифуркации положения равновесия системы (1), которая может быть реализована как транскритическая или как бифуркация типа вилки.

Теорема 3. Если $a_2 b_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1+e^{-h_0}}{1-e^{-h_0}}$ при некотором $h_0 > 0$, то точка h_0 является точкой бифуркации $2h_0$ -периодических решений системы (1).

Полученные результаты при соответствующей их модификации можно распространить на случай системы (1), когда

$$x \in R^n, \quad y \in R^m, \quad f: R^{n+m} \rightarrow R^n, \quad g: R^{n+m} \rightarrow R^m.$$

Литература

1. Юмагулов М. Г. Введение в теорию динамических систем.— СПб.: Лань, 2015. — 272.
2. Шильников Л.П., Шильников А.А., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. — 548.
3. Юмагулов М.Г., Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фалытдинов М.Ф. Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфимский математический журнал. Том 10. №1. 2018.— 25-49.