МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА-ШОУЛСА ДЛЯ УЧЕТА СТОИМОСТИ ЛИКВИДНОСТИ И ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК

@ М.М. Дышаев, В.Е. Федоров

Mikhail.Dyshaev@gmail.com, kar@csu.ru

УДК 517.957, 336.76

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.69.

Добавляя учет стоимости ликвидности как квадратичной и линейной функций от объема операций, получены нелинейные уравнения типа Блэка — Шоулса. Для определения транзакционных издержек используется модель методологии ценообразования с поправкой на риск (risk-adjusted pricing methodology (RAPM) model).

Ключевые слова: ликвидность, транзакционные издержки, нелинейные уравнения типа Блэка — Шоулса

Modification of the Black-Scholes equation to account for the cost of liquidity and transaction costs

We take into account the liquidity of the underlying assets and transaction costs for delta hedging. The liquidity cost is considered as a linear and quadratic function of the transaction amount. New nonlinear equations of Black-Scholes type are obtained. The Risk Adjusted Pricing Methodology (RAPM) model is used to determine transaction costs.

Keywords: liquidity, transaction costs, nonlinear Black — Scholes equations

Модель Блэка — Шоулса [1] для колл (call) опциона Европейского типа можно записать как:

$$\begin{aligned}u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) &= 0, \\u(0, t) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{x - Ke^{-r(T-t)}} = 1, \\u(x, T) &= \max(x - K, 0), \\x &\in [0, +\infty), \quad t \in [0, T], \quad K = \text{const}, \quad K > 0, \\ \sigma &= \text{const}, \quad \sigma > 0, \quad r = \text{const}, \quad r \geq 0.\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00244).

Дышаев Михаил Михайлович, к.ф.-м.н., ЧелГУ (Челябинск, Россия); Mikhail Dyshaev (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия) Vladimir Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Здесь x представляет собой цену базового актива, $u(x, t)$ - цена колл опциона Европейского типа, K - цена «страйк», то есть цена исполнения опциона, σ - это историческая волатильность, а r - это безрисковая процентная ставка.

Модель RAPM получена в работе [2]. Соответствующее уравнение Блэка — Шоулса с поправкой на риск представлено в виде

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3}\right) x^2 u_{xx} - r(u - xu_x) = 0,$$

где $q = 3(k^2 R/2\pi)^{1/3}$. Здесь k - транзакционные издержки, пропорциональные объему операций, а $R \geq 0$ - коэффициент премии за риск.

Представляется возможным дополнить модель RAPM новым фактором риска, если учитывать премию за риск неликвидности так же, как и другие премии.

Функция общей премии за риск имеет вид

$$\begin{aligned} r_R &= r_{TC} + r_{VP} + r_{IL} = \\ &= \frac{kx\sigma|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}} \Delta t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} R \sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right)^\alpha (\sigma x |u_{xx}|)^\alpha \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Если рассмотреть простую модель, когда стоимость ликвидности является линейной функцией относительно объема транзакции, то есть $\alpha = 1$, мы получим следующее нелинейное уравнение Блэка — Шоулса

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3}\right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) &= 0, \\ q &= 3((k + \varepsilon)^2 R/2\pi)^{1/3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для случая квадратичной функции стоимости ликвидности, $\alpha = 2$, получена новая нелинейная модель Блэка — Шоулса:

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} - pxu_{xx}\right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) &= 0, \\ q &= 3(k^2 R/2\pi)^{1/3}, \quad p = 2\varepsilon/\pi. \end{aligned}$$

Литература

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy, **81**:3 (1973), 637-654.
2. Jandačka M., Ševčovič, D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile // Journal of Applied Mathematics, **2005**:3 (2005), 235-258.