НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНВАРИАНТНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

@ Д.И. Синельщиков

dsinelshchikov@hse.ru

УДК 517.925

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.35.

В докладе рассматривается семейство нелинейных осцилляторов с кубической, относительно первой производной, нелинейностью. Показано что нелокальные преобразования сохраняют автономные инвариантные кривые для уравнений из рассматриваемого семейства. Также демонстрируется возможность построения в параметрическом виде автономного первого интеграла для одно из двух уравнений, связанных нелокальными преобразованиями, при условии что известно общее решение другого уравнения. Результаты иллюстрируются на примере классов эквивалентности для двух уравнений типа Пенлеве.

Ключевые слова: нелокальные преобразования, первые интегралы, инвариантные кривые.

Nonlocal transformations and integrable nonlinear oscillators

We consider a family of nonlinear oscillators that is cubic, with respect to the first derivative. We show that certain nonlocal transformations preserve autonomous invariant curves for the equations from the studied family. We also demonstrate that an autonomous first integral for one of two non-locally related equations can be constructed in the parametric form from the general solution of the other equation. We illustrate our results by constructing nonlocal equivalence classes for two Painlevé type equations.

Keywords: nonlocal transformations, first integrals, invariant curves.

Рассматривается семейство уравнений

$$y_{zz} + k(y)y_z^3 + h(y)y_z^2 + f(y)y_z + g(y) = 0, \quad (1)$$

где $k, h, f \neq 0$ и $g \neq 0$ произвольные, достаточно гладкие функции. Данное семейство уравнений является замкнутым относительно преобразований [1-3]

$$w = F(y), \quad d\zeta = (G_1(y)y_z + G_2(y))dz. \quad (2).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 19-71-10003).

Синельщиков Дмитрий Игоревич, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Dmitry Sinelshchikov (HSE University, Moscow, Russia)

Здесь G_1 , $G_2 \neq 0$ и $F_y \neq 0$ произвольные достаточно гладкие функции.

В работе показано что преобразования (2) сохраняют инвариантные кривые допускаемые уравнениями из (1). Приводятся явные формулы связывающие инвариантные кривые и их кофакторы для двух уравнений из (1) связанных преобразованиями (2). Таким образом, нелокальные преобразования (2) могут быть использованы для расширения уже существующей классификации инвариантных кривых для какого-либо уравнения из (1) на его класс эквивалентности. В частности, это позволяет получать классификацию инвариантных кривых для неполиномиальных уравнений, нелокально связанных с уравнением с известной классификацией инвариантных кривых.

Также показано что если известно общее решение одного из двух уравнений, связанных преобразованиями (2), то для другого уравнения можно построить автономный первый интеграл в параметрическом виде. Для иллюстрации полученных результатов построены два интегрируемых подсемейства (1), эквивалентных двум уравнениям типа Пенлеве с известной классификацией инвариантных кривых. Рассматриваются ряд конкретные примеры интегрируемых уравнений из (1), включая неполиномиальные уравнения, для которых строятся инвариантные кривые и первые интегралы. В частности, рассматриваются некоторые полиномиальные уравнения Льева и редукция к переменным бегущей волны семейства уравнений реакции-диффузии.

Литература

1. *Nakpim W., Meleshko S. V.* Linearization of second-order ordinary differential equations by generalized Sundman transformations // SIGMA. **6** (2010), 051.
2. *C. Muriel, J. L. Romero* Second-order ordinary differential equations with first integrals of the form $C(t) + 1/(A(t, x)\dot{x} + B(t, x))$ // J. Nonlinear Math. Phys. **18** (2011), 237–250.
3. *Sinelshchikov D. I.* Linearizability conditions for the Rayleigh-like oscillators // Phys. Lett. A., **384**:26 (2020), 126655.