ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

@ Т.Ж. Алланазарова, Т.Г. Хасанов, А.У. Искандаров

j.tazagul1986@mail.ru, temur.xasanov.2018@mail.ru

УДК 517.957

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.4.

Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и интегральным источником в классе бесконечнозонных периодических функций. Выводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением уравнения мКдФ с нагруженными членами и интегральным источником. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда построенного с помощью решения аналога системы уравнений Дубровина и формула первого следа действительно удовлетворяет уравнения мКдФ с нагруженными членами и интегральным источником. Кроме того доказано, что

- 1) если начальная функция является действительной π - периодической аналитической функцией, то и решение задачи Коши для уравнения мКдФ с нагруженными членами и источником интегрального типа тоже является действительной аналитической функцией по переменной x ;
- 2) если число $\pi/2$ является периодом (антиперіодом) начальной функции, то число $\pi/2$ является периодом (антиперіодом) для решения задачи Коши по переменной x .

Ключевые слова: Дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ), оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with loaded terms and an integral source in the class of periodic functions

Алланазарова Тазagul Жуманиязовна, ассистент кафедры "Прикладная математика КГУ (Нукус, Узбекистан); Allanazarova Tazagul (Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan)

Хасанов Темур Гафуржанович, аспирант УрГУ, (Ургенч, Узбекистан); Khasanov Temur (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

Искандаров Аббосбек Улугбек угли, магистрант УрГУ, (Ургенч, Узбекистан); Iskandarov U.A. (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

The inverse spectral problem method is used to integrate the modified Korteweg-de Vries equation with loaded terms and an integral source in the class of infinite-gap periodic functions. The evolution of the spectral data of the periodic Dirac operator is derived, the coefficient of which is a solution to the mKdV equation with loaded terms and an integral source. It is shown that the sum of a uniformly converging functional series constructed using the solution of an analogue of the Dubrovin system of equations and the formula for the first trace does indeed satisfy the mKdV equation with loaded terms and an integral source. Moreover, it was proved that

1) if the initial function is a real π - periodic analytic function, then the solution of the Cauchy problem for the mKdV equation with loaded terms and a source of integral type is also a real analytic function in the variable x ;

2) if the number $\pi/2$ is the period (antiperiod) of the initial function, then the number $\pi/2$ is the period (antiperiod) for solving the Cauchy problem with respect to the variable x .

Keywords: Defocusing nonlinear Schrodinger equation (DNUSH), Dirac operator, spectral data, system of Dubrovin equations, trace formulas.

В данной работе рассматривается задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и источником вида

$$q_t = a(t)q(x_0, t)[6q^2q_x - q_{xxx}] + b(t)q(x_1, t)q_x + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)s_1(\pi, \lambda, t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)d\lambda, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R \quad (2)$$

в классе действительных π - периодических по x (не обязательно конечнотонных) функций

$$q(x + \pi, t) = q(x, t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

В уравнение (1), коэффициенты $a(t), b(t) \in C[0, \infty)$ - заданные ограниченные функции, а $x_0, x_1 \in R$ и $\beta(\lambda, t)$ - действительная непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику

$$\beta(\lambda, t) = \underline{\underline{O}}(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

$\psi^\pm = (\psi_1^\pm(x, \lambda, t), \psi_2^\pm(x, \lambda, t))^T$ являются решениями Флоке (нормированными условием $\psi_1^\pm(0, \lambda, t) = 1$) уравнение Дирака

$$L(t) \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in R \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$ обозначено решение уравнение (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x, t)$, $\psi^\pm(x, \lambda, t)$, $x \in R$, $t > 0$ задачи (1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Если $q(x, t)$, $\psi^\pm(x, t, \lambda)$, $x \in R$, $t > 0$ является решением задачи (1)-(3), то спектральные данные $\lambda_n(\tau, t)$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$ - оператора Дирака*

$$L(\tau, t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x + \tau, t) \\ q(x + \tau, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\dot{\lambda}_n(\tau, t) = 0, \quad n \in Z, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = & 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{ -2\xi_n a(t) q(x_0, t) [q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + 2\xi_n^2(\tau, t)] - \\ & - b(t) \xi_n q(x_1, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\tau, t) \beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, \tau, t)}{\xi_n^2(\tau, t) - \lambda^2} d\lambda \}, \quad n \in Z \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Знаки $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z \quad (8)$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$ спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau) \equiv L(\tau, 0)$.

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau, t) + q'_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right),$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)) \quad (9)$$

систему (7) можно переписать в замкнутой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = & 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \{ a(t) \xi_n(\tau, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sigma_k(x_0, t) h_k(\xi(x_0, t)) \cdot \\ & \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k(\tau, t)) + 4\xi_n^2(\tau, t) \right] + \\ & + b(t) \xi_n(\tau, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sigma_k(x_1, t) h_k(\xi(x_1, t)) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\tau, t) \beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, \tau, t)}{\xi_n^2(\tau, t) - \lambda^2} d\lambda \}, \quad n \in Z. \end{aligned} \quad (10)$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решение задач (1)-(3). Для этого, сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in Z$, оператора Дирака $L(\tau, 0)$ соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$, через $\lambda_n, \xi_n(\tau, t), \text{sigma}_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z$. Теперь в систему уравнение (10) и начальным условиям (8) последовательно положим $\tau = x_0$ и $\tau = x_1$. Решая полученную задачу Коши, находим

$$\xi_n(x_0, t), \sigma_n(x_0, t), n \in Z \text{ и } \xi_n(x_1, t), \sigma_n(x_1, t), n \in Z.$$

Затем из формулы следов (9) определим функции $q(x_0, t)$ и $q(x_1, t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнение (7), и решая задачу Коши (7), (8) при произвольном значении τ , находим

$$\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z.$$

Из формулы следов (9) определим $q(\tau, t)$. После этого легко найти решения Флоке $\psi^\pm(x, \lambda, t)$ уравнения $L(0, t)y = \lambda y$.

Литература

1. Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Kortevég-de Vries equation. // Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p.1095-1098.

2. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J.Phys.Soc.Japn., 32:6,44-47(1972).
3. *Смирнов А. О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. // Матем. сб., 185:8(1994), с.103-114.
4. *Mel'nikov V.K.* Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source. // Inverse problems, 6:2(1990), 233-246.
5. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Об уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. ТМФ, 164 (2), 214-221 (2010).
6. *Хасанов А.Б., Матякубов М.М.* Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительным членам. // ТМФ, т.203, №2, (2020), 192-204.
7. *Khasanov A.B., Allanazarova T.J.* Integration of the nonlinear modified Korteweg-de Vries equation with a loaded term. Uzbek Mathematical Journal, 2020, выпуск 3, 85-98.