О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ДВУХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

@ А.И. Эгамов
albert810@yandex.ru

УДК 517.968.742

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.48.

Для некоторого интегро-дифференциального уравнения поставлена начально-краевая задача со вторыми краевыми условиями. Решение этой задачи связано с решением линейной второй начально-краевой задачи гиперболического типа.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, начально-краевая задача, задача гиперболического типа.

On the connection between solutions of two initial-boundary value problems

The integro-differential equation with the second-type boundary and initial conditions is considered. The solution of this problem is associated with the solution of the standard linear second initial-boundary value problem of hyperbolic type.

Keywords: integro-differential equation, initial-boundary value problem, hyperbolic type problem.

Пусть множество $Q = (0, l) \times (0, T)$, $l > 0$, $T > 0$ с "границей" Σ , состоящей из точек $\{(x, t) : t = 0 \text{ или } (l - x)x = 0\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения: на множестве Q с границей Σ , найти функцию $y(x, t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, – решение уравнения:

$$y''_{tt}(x, t) = a^2 y''_{xx}(x, t) + b(x, t)y(x, t) - 2y'_t(x, t) \int_0^l b(x, t)y(x, t) dx - y(x, t)R[y], \quad (1)$$

с краевыми и начальными условиями

$$y'_x(0, t) = y'_x(l, t) = 0, \quad y(x, 0) = \varphi(x), \quad y'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (2)$$

Эгамов Альберт Исмаилович, к.ф.-м.н., доцент, ННГУ им. Н.И.Лобачевского (Н.Новгород, Россия); A.I. Egamov (Lobachevsky University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia)

Функция $b(x, t)$ – непрерывно дифференцируемая функция по t и непрерывная по x . Начальные функции $\varphi(x) \in C_2^3[0, l]$, $\psi(x) \in C_2[0, l]$. Оператор

$$R[y] = \left(\int_0^l b(x, t)y(x, t) dx \right)^2 + \int_0^l (b'_t(x, t)y(x, t) + b(x, t)y'_t(x, t)) dx. \quad (3)$$

Широко известна [1] начально-краевая задача для гиперболического уравнения: на множестве Q , найти функцию $z(x, t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, – решение уравнения:

$$z''_{tt}(x, t) = a^2 z''_{xx}(x, t) + b(x, t)z(x, t), \quad (4)$$

с краевыми и начальными условиями

$$z'_x(0, t) = z'_x(l, t) = 0, \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad z'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (5)$$

Пусть $p(t) = \int_0^l z'_t(x, t) dx$. Тогда

$$p'_t(t) = \int_0^l b(x, t)z(x, t) dx, \quad \frac{p'_t(t)}{p(t)} = \int_0^l b(x, t)y(x, t) dx,$$

$$\frac{p''_{tt}(t)}{p(t)} = \left(\frac{p'_t(t)}{p(t)} \right)' + \left(\frac{p'_t(t)}{p(t)} \right)^2 = R[y].$$

Из работы [2] (см. также [3]) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны и удовлетворяют указанным условиям гладкости, кроме того, выполняются равенства $\int_0^l \psi(x) dx = 1$, $\int_0^l b(x, 0)\varphi(x) dx = 0$. Функция $p(t) = \int_0^l z'_t(x, t) dx > 0$ для любого $t \in [0, T]$. Тогда на этом отрезке справедливо тождество

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{p(t)},$$

где $y(x, t)$ – единственное решение задачи (1)–(2), $z(x, t)$ – единственное решение задачи (4)–(5).

Литература

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400с.

2. Бураго П.Н., Эгамов А.И. О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 4. С. 413–429.

3. *Egamov A.I.* The Existence and Uniqueness Theorem for Initial-Boundary Value Problem of the Same Class of Integro-Differential PDEs // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 315. Network Algorithms, Data Mining, and Applications. I. Bychkov et al (eds) 2020. P. 173-186.