О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО

@ О.В. Солонуха

solonukha@yandex.ru

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.38.

Доказана теорема существования и единственности периодического решения линейного параболического уравнения с краевым условием типа Бицадзе–Самарского. Рассмотрен пример с оператором Лапласа. Используются методы эллиптической теории дифференциально–разностных уравнений и теории монотонных операторов.

Ключевые слова: нелокальная параболическая задача, периодическое решение, максимально монотонный оператор, сильно эллиптический оператор.

On periodic solution of some linear parabolic problem with Bitsadze–Samarskii boundary conditions

The existence and uniqueness theorem of a periodic solution of a linear parabolic equation with a boundary condition of the Bitsadze–Samarsky type is proved. An example with the Laplace operator is considered. We use the elliptic theory of differential-difference equations and the theory of monotone operators.

Keywords: nonlocal parabolic problem, periodic solution, maximally monotone operator, strongly elliptic operator.

Рассматривается линейное параболическое уравнение с краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского. Доказана теорема существования и единственности периодического обобщенного решения. В качестве модельного примера рассмотрена параболическая задача с Лапласианом в прямоугольном параллелепипеде $\Omega_T = (0, T) \times (0, 2) \times (0, 1)$

$$\partial_t w(t, x) - \Delta w(t, x) = f(t, x) \quad ((t, x) \in \Omega_T), \quad (1)$$

здесь $f \in L_2(\Omega_T)$, с нелокальными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w(t, x_1, 0) &= w(t, x_1, 1) = 0 & (t \in (0, T), 0 \leq x_1 \leq 2), \\ w(t, 0, x_2) &= \gamma_1 w(t, 1, x_2) & (t \in (0, T), 0 < x_2 < 1), \\ w(t, 2, x_2) &= \gamma_2 w(t, 1, x_2) & (t \in (0, T), 0 < x_2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер темы 075–03–2020–223/3 (FSSF-2020-0018)).

Солонуха Олеся Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, ФИЦ ИУ РАН, РУДН (Москва, Россия); Olesya V. Solonukha (CC RAS, RUDN University; Moscow, Russia)

Периодическое решение уравнения (1) удовлетворяет условию

$$w(0, x) = w(T, x) \quad (x = (x_1, x_2) \in Q = (0, 2) \times (0, 1)). \quad (3)$$

Введем пространство

$$W_\gamma := \{w \in L_2(0, T; W_2^1(Q)) : \partial_t w \in L_2(\Omega_T), w \text{ удовлетворяет (2), (3)}\}.$$

Теорема. Пусть $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$. Тогда для любого $f \in L_2(\Omega_T)$ существует единственное решение задачи (1) $w \in W_\gamma \subset C(0, T; L_2(Q))$.