**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ: СТАРЫЕ И НОВЫЕ
РЕЗУЛЬТАТЫ
@ А.Б. Муравник
amuravnik@yandex.ru**

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.22.

Представлен обзор старых и свежих результатов о задаче Дирихле в полупространстве для эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Обзором охвачены два принципиально различных типа краевых данных.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, эллиптические уравнения, задачи в полупространстве, времениподобная переменная.

**Elliptic differential-difference equations in half-spaces:
old and new results**

A review of old and recent results on the Dirichlet problem in half-spaces for elliptic differential-difference equations is presented. Two qualitatively different types of boundary-value data are covered.

Keywords: differential-difference equations, elliptic equations, half-space problems, timelike variables.

Краевые задачи в полупространстве традиционно считаются характерными для *нестационарных* уравнений: единственная независимая переменная, изменяющаяся на полуоси, естественным образом трактуется, как время, все остальные переменные — пространственные, а данные, задаваемые на границе области (т. е. на гиперплоскости, ортогональной этой полуоси), трактуются, соответственно, как начальные данные. Однако, напр., задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве тоже корректна, причем выделенная указанным выше образом *пространственная* переменная приобретает так называемые *времениподобные* свойства — в частности, разрешающий оператор обладает полугрупповым свойством, а для решений справедлив критерий стабилизации Репникова—Эйдельмана при стремлении указанной времениподобной переменной к бесконечности. Таким образом, указанная задача обладает значительным качественным сходством с задачей Коши (с тем же самым краевым условием) для уравнения теплопроводности, что весьма

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288 А).
Муравник Андрей Борисович, д.ф.-м.н., АО «Концерн «Созвездие» (Воронеж, Россия); Andrey Muravnik (JSC “Concern “Sozvezdie”, Russia)

нетривиально: учитывая, что эти два уравнения — разных типов, даже то, что одна и та же задача является корректной для каждого из них, не очевидно.

Исследуемые задачи естественным образом разделяются на два класса — задачи с *ограниченными* краевыми данными и задачи с *интегрируемыми* краевыми данными. В классическом случае *дифференциальных* уравнений (как эллиптических, так и параболических), эта разница в постановке задачи принципиальна — она приводит к тому, что мы получаем решения с качественно различными свойствами. В частности, только в задачах первого из этих классов допустимы постоянные решения, и только решения с конечной энергией допустимы в задачах второго класса. Иными словами, критерий стабилизации Репникова—Эйдельмана — решение может иметь предел (причем не обязательно равный нулю), а может вообще не иметь его — имеет место только для задач первого класса. А в задачах второго класса решение всегда имеет нулевой предел, и основным предметом исследования является скорость убывания решения.

В рамках настоящего доклада в излагаются результаты исследований задачи Дирихле в полупространстве для эллиптических *дифференциально-разностных* уравнений, т. е. уравнений, в которых на неизвестную функцию, помимо дифференциальных операторов, действуют операторы сдвига. Такие функционально-дифференциальные уравнения в настоящее время активно исследуются во всем мире, что обусловлено как их многочисленными приложениями, не покрываемыми классическими моделями математической физики, так и чисто теоретическим интересом: *нелокальная* природа таких уравнений порождает качественно новые эффекты, отсутствующие в классическом случае дифференциальных уравнений, а многие методы исследований, привычные для теории дифференциальных уравнений, оказываются неприменимыми (таковы, напр., все методы, основанные на принципе максимума), и, соответственно, требуется разработать новые методы.

Будет показано, что принципиальная разница между типами краевых данных, имеющая место для *дифференциальных* уравнений, сохраняется и в *дифференциально-разностном* случае. Будут представлены результаты, полученные в течение последних пяти лет для задач с обоими типами краевых данных, указанными выше: разрешимость указанных задач, интегральное представление их решений формулами Пуассоновского типа, асимптотические свойства решений при неограниченном возрастании времениподобной переменной.