ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

@ Р. Пиров, Ф.Ш. Рахимзода

pirov60@mail.ru

УДК 66.011

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.30.

В работе исследуются некоторые нелинейные переопределенные системы второго порядка. Найдены явные условия совместности, доказаны теоремы существования и единственности решений.

Ключевые слова: многообразия решения, переопределенные системы, условия совместности.

Investigation of some overdetermined second-order systems with three unknown functions in space

The paper investigates some nonlinear overdetermined systems of the second order. Explicit conditions of compatibility are found, theorems of existence and uniqueness of solutions are proved.

Keywords: solution varieties, overdetermined systems, compatibility conditions.

Для линейных системы

$$L^k U = \sum_{j=1}^n a_{kj}(x_1, x_2, \dots, x_k, U_1, U_2, \dots, U_k) \partial_{k_j} U = 0, k = \overline{1, m} \quad (1)$$

теория которой связана именем Якоби. В современном изложении теории этой системы синтезированы теоремой Фробениуса.

Настоящая статья, посвящена изучению вопросов совместности и однозначной разрешимости переопределенных систем от пяти дифференциальных уравнений (д.у.):

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{zy}, U_{zz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}),$$
$$i = \overline{1, 5}, \quad (x, y, z) \in R^3, \quad (3)$$

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, V_{xx}, V_{yy} = f^i(x, y, z, U, V, U_x, U_y, V_x, V_y, V_{xy}),$$
$$i = \overline{1, 5}, \quad (x, y, z) \in R^3, \quad (4)$$

Пиров Рахмон, ТГПУ им.С.Айни
Рахимзода Ф.Ш., ТГПУ им.С.Айни

Использование в системах (3) и (4) одинакового обозначения $\alpha^i U + \beta^i V + \gamma^i W + \delta^i$, f^i , и f^k функций правой части от различного числа аргументов оправдано тем, что они изучаются независимо друг от друга. В этих системах неизвестные функции U, V и W зависят от x, y, z в основном ищутся в $\Pi_0(a, b)$ класса C^3 или C^4 ; здесь $\Pi_0 = \{(x, y, z) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < a, |z - z_0| < a\}$ при некотором $a > 0$.

Основной метод исследования состоит в замене производных первого и второго порядка на новые неизвестные функции, переходе к системам с большим числом неизвестных и в установлении связей с достаточно изученными системами в полных дифференциалах (п.д. - система).

2. Переопределённые системы пять дифференциальных уравнений второго порядка с одной (3) и двумя (4) неизвестными функциями.

Оговоримся сразу, что системы с четырьмя уравнениями в основном подробно изучены профессором Р. Пировым. К примеру рассматривая систем

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (5)$$

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}, U_{zz}), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (6)$$

установлена что нелинейные системы четырёх уравнений указанные выше приводятся к п.д.-система с шестого неизвестными функциями.

В данной работе, нами рассматриваются системы пять уравнений вида (3) и (4) отличающие от (5) и (6) во - первых тем, что каждая из них содержать на одно уравнение больше и во - вторых вторая система (т.е. (4)) зависят от двух неизвестных функций.

Система (3), где $f^i \in C^3(\Pi)$, $U \in C^4(\Pi)$, заменой $U_x = p(x, y, z)$, $U_y = q(x, y, z)$, $U_z = R(x, y, z)$, $U_{yy} = q_y = R_y = \tau(x, y, z)$ с учётом обязательного тождественного выполнения равенств $q_x = p_y (\equiv f^2)$, $q_x = R_y (\equiv f^4)$, $p_z = R_z (\equiv f^3)$ и р.с.п. $p_{yz} = p_{zy}$, $q_{yz} = q_{zy}$, $R_{yz} = R_{zy}$, при $f_\tau^2 \neq 0$, $f_\tau^5 - f_\tau^3 \cdot f_\tau^4 \neq 0$ приводится к системе

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = R \\ p_x, p_y, p_z, R_y, R_z = f^j(x, y, x, p, q, R, \tau), j = \overline{1, 5}, \\ R_x = f^3, q_x = f^2, q_y = \tau, q_z = f^4, \\ \tau_x, \tau_y, \tau_z = f^k(x, y, x, p, q, R, \tau), k = 6, 7, 8. \end{cases} \quad (7)$$

Тождественное относительно U, p, q, R, τ выполнение семь развернутых равенство смешанных производных.

$$R_{xy} = R_{yz}, R_{xz} = R_{zx}, q_{xy} = q_{yx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (8)$$

в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0, U_0, p_0, q_0, R_0, \tau_0)$ будут условиями полной интегрируемости. Задавая задачу с начальными данными

$$[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{yy}]_0 = c_5, \quad (9)$$

доказана теорема утверждающая однозначную разрешимость задачу (3) (9).

Для системы (4) на плоскости осуществляется замена $U_x = p(x, y)$, $U_y = q(x, y)$, $V_x = \tau(x, y)$, $V_y = \theta(x, y)$, $V_{yy} = \theta_y(x, y) = t(x, y)$. Тогда в силу этих замен очевидных тождеств $p_y \equiv q_x$, $\tau_y \equiv \theta_x$, и р.с.п. $p_{xy} = p_{yx}$, $q_{xy} = q_{yx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\theta_{xy} = \theta_{yx}$ ($f_t^1 \cdot f_t^3 - (f_t^2)^2 \neq 0$, $f_t^4 - (f_t^5)^2 \neq 0$) приходим к п.д. - системе относительно семи неизвестных функций $U, V, p, q, \tau, \theta, t$, совместность которой зависят от соотношения

$$\begin{aligned} H(x, y, U, V, p, q, \tau, \theta, t) = & f_y^6 - f_x^7 + f_U^6 \cdot q - f_U^7 \cdot p + f_V^6 \cdot \tau + f_p^6 \cdot f^2 - \\ & - f_p^7 \cdot f^1 + f_q^6 \cdot f^3 - f_q^7 \cdot f^2 + f_\tau^6 \cdot f^5 - f_\tau^7 \cdot f^4 + \\ & + f_t^6 \cdot t - f_\theta^7 \cdot f^5 + f_t^6 \cdot f^7 - f_t^7 \cdot f^6 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача с начальными данными задается формулами

$$\begin{aligned} [U]_0 = C_1, [V]_0 = C_2, [U_x]_0 = C_3, [U_y]_0 = C_4, [V_x]_0 = C_5, \\ [V_y]_0 = C_6, [U_{yy}]_0 = C_7, \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема Пусть дана система (4) для которой выполняются выше-указанные условия. Тогда при тождественном выполнении условия (10), $\alpha < \min(\alpha, \frac{b}{M})$, $M = \max |f^i|, i = \overline{1, 5}$, задача (4) (11) в классе $C^4(\Pi_0)$ разрешима единственным образом.