ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА-ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА

© Л.М. Кожевникова, А.П. Кашникова

kosul@mail.ru, a.kashnikova98@yandex.ru

УДК 517.956

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.19.

В работе рассматриваются нелинейные эллиптические уравнения второго порядка с суммируемой правой частью. В ограниченных областях доказано существование энтропийных решений задачи Неймана в сепарабельных пространствах Музилака-Соболева-Орлича.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, задача Неймана, пространство Музилака-Орлича-Соболева, энтропийное решение, сепарабельное пространство.

Entropy solutions of the Neumann problem for quasilinear elliptic equations in Muzilak-Orlicz-Sobolev spaces

In this work, nonlinear elliptic equations of the second order with the summable right-hand side. In bounded domains, the existence of entropy solutions to the Neumann problem in separable Muzilak-Sobolev-Orlicz spaces is proved.

Keywords: quasilinear elliptic equation, Neumann problem, Muzilak-Orlicz-Sobolev space, entropy solution, separable space.

Пусть Ω — ограниченная область пространства

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \quad n \geq 2,$$

с липщцевой границей $\partial\Omega$. Рассматривается задача Неймана для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка вида

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + M'(x, u) + a(x, u) = f, \quad x \in \Omega, \quad f \in L_1(\Omega); \quad (1)$$

с однородным краевым условием

$$a(x, \nabla u) \cdot \eta \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

Кожевникова Лариса Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (Стерлитамак, Россия); Larisa Kozhevnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University of Sterlitamak, Russia)

Кашникова Анастасия Павловна, студент, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (Стерлитамак, Россия); Anastasia Kashnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University of Sterlitamak, Russia)

где η — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Для квазилинейных эллиптических уравнений с нелинейностями, определяемыми функциями Музилака-Орлича, ранее было доказано существование энтропийных (см. [1]) и ренормализованных (см. [2]) решений задачи Дирихле. Задача Неймана менее изучена, известны лишь результаты существования слабых решений в банаховых пространствах Музилака-Орлича-Соболева (см. [3], [4]). В настоящей работе выделен некоторый класс нелинейных эллиптических уравнений вида (1), для которых построены энтропийные решения задачи Неймана в сепарабельных пространствах Музилака-Орлича-Соболева. Ограничения на каратеодоревы функции

$$a(x, s) = (a_1(x, s), \dots, a_n(x, s)) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad a_0(x, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), формулируются в терминах специального класса выпуклых функций Музилака-Орлича.

Условия MN. Предполагается, что непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{R}$ и интегрируемая в Ω функция Музилака-Орлича $M(x, z)$ подчиняется Δ_2 -условию, дополнительная к M функция $\overline{M}(x, z)$ также интегрируемая в Ω и выполнены следующие условия:

$$\int_1^\infty M^{-1}(x, z) z^{-(n+1)/n} dz = \infty, \quad \int_0^1 M^{-1}(x, z) z^{-(n+1)/n} dz < \infty;$$

для любого $z_0 > 0$ существует $c(z_0) > 0$ такое, что для любого $z \geq z_0$ справедливы соотношения

$$\inf_{x \in \Omega} \frac{M(x, z)}{z} \geq c, \quad \inf_{x \in \Omega} \frac{\overline{M}(x, z)}{z} \geq c.$$

Пусть существуют неотрицательные функции $\Phi \in E_{\overline{M}}(\Omega)$, $\phi \in L_1(\Omega)$ и положительные константы $\widehat{A}, \bar{a}$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и для любых $s, t \in \mathbb{R}^n$, $s \neq t$ справедливы неравенства:

$$a(x, s) \cdot s \geq \bar{a}M(x, |s|) - \phi(x);$$

$$|a(x, s)| \leq \Phi(x) + \widehat{A}\overline{M}^{-1}(x, M(x, |s|));$$

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) > 0.$$

где $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $|s| = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{1/2}$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_1(\Omega)$ такая, что при п.в. $x \in \Omega$ для всех $k > 0$ и $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства:

$$\sup_{|t_0| \leq k} |b(x, t_0)| = B_k(x) \in L_1(\Omega);$$

$$b(x, s_0)s_0 \geq 0.$$

Определим функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathcal{T}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in W^1 L_M(\Omega)$ при любом $k > 0$.

Определим $\mathcal{T}_{M, tr}^1(\Omega)$ как множество функций $u \in \mathcal{T}_M^1(\Omega)$ таких, что существует последовательность $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_M^1(\Omega)$, удовлетворяющая условиям:

- (C1) $u_n \rightarrow u$ п.в. в Ω ;
- (C2) $\forall k > 0 \quad \nabla T_k(u_n) \rightarrow \nabla T_k(u)$ в $L_1(\Omega)$;
- (C3) существует измеримая функция v на $\partial\Omega : u_n \rightarrow v$ п.в. в $\partial\Omega$.

Введем обозначение $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u dx$.

Определение. Энтропийным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathcal{T}_{M, tr}^1(\Omega)$ такая, что

- 1) $b(x, u), M'(x, u) \in L_1(\Omega)$;
- 2) при всех $k > 0$, $\xi \in W^1 L_M(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\langle (b(x, u) + M'(x, u) - f)T_k(u - \xi) \rangle + \langle a(x, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) \rangle \leq 0.$$

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть выполнены условия **MN**, тогда существует энтропийное решение задачи (1)–(2).

Литература

1. *Elemine Vall M.S.B., Ahmed A., Touzani A. and Benkirane A.* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L_1 data // *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 36:1 (2018), 125–150.
2. *Ait Khellou M., A. Benkirane A.* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak-Orlicz spaces // *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, **43**:2 (2016), 164–187.
3. *Dong Ge, Fang X.* Differential equations of divergence form in separable Musielak-Orlicz-Sobolev spaces // *Boundary Value Problems*, **2016**:106 (2016), 1–19.
4. *Youssfi A., Ould Khatri M.M.* Continuous imbedding in Musielak spaces with an application to anisotropic with an application to nonlinear neumann problems // *Electronic Journal of Differential Equations*, **2021**:26 (2021), 1–28.