ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

@ О.Г. Гайдамак, В.И. Луценко, А.Р. Сагитова

gajdamakog@yandex.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.64.

В работе даётся описание функционалов для весового пространства многих переменных

Ключевые слова: весовое пространство, функционал

On representation by series of exponents in the normed space of analytic functions

The paper describes functionals for the weighted space of many numbers

Keywords: weight space, functional

Пусть $w(t)$ положительная функция определенная на $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $L^2(w)$ пространство локально интегрируемых функций $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна следующая норма

$$\|f\|_{L^2(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 / w(t) dt \right)^{1/2},$$

где $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ и $dt = dt_1 dt_2 \dots dt_n$.

Пусть S линейный непрерывный функционал над гильбертовым пространством $L^2(w)$. Определим преобразование Фурье-Лапласа функционала S следующим образом

$$\hat{S}(z) = S(\exp(\langle t, z \rangle)), \text{ где } \langle z, t \rangle = z_1 t_1 + z_2 t_2 + \dots + z_n t_n.$$

Преобразование Фурье-Лапласа сопоставляет каждому линейному функционалу S целую функцию $\hat{S}(z)$ в $\mathbb{C}^n$ и, тем самым, определяет сопряженное пространство $L_2^*(w)$. В данной статье рассматривается задача описание этого подпространства целых функций.

Гайдамак Ольга Григорьевна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Gaidamak Olga (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Луценко Владимир Иванович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Lucenko Vladimir (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Сагитова Айгуль Рашитовна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Sagitova Aigul (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Одно из решений этой задачи сводится к определению нормы в пространстве целых функций с помощью формулы

$$\|F\|_{\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2},$$

где $\mu(z)$ — неотрицательная мера Бореля, такая, что для любого функционала S выполняется следующее соотношение

$$c\|S\|_{L_2^*(w)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{S}(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} \leq C\|S\|_{L_2^*(w)}$$

Если такая мера существует, то преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространства $L_2^*(D, w)$ и пространства целых функций с нормой $\|\cdot\|_{\mu}$.

При $n = 1$ для произвольных логарифмически выпуклых весов в работе [4] получено описание пространства функционалов с аналогом равенства Парсеваля (1), с абсолютными константами в оценке. В работе ([1]) доказано, что для получения (1) с абсолютными оценками требование логарифмической выпуклости весовой функции необходимо.

Аналогичные описания пространств функционалов над пространствами последовательностей, Смирнова, Бергмана представлены в работах [2-5].

Справедлива следующая теорема.

Теорема Пусть $\ln w(t) = 2kt^{\alpha}$ ($\alpha > 1$) и $h(t) = k|t|^{\alpha}$ — выпуклая, радиальная функция в $\mathbb{R}^n$. Также определим сопряженную по Юнгу функцию

$$\tilde{h}(|x|) = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (< x, t > - h(t)) = (\alpha - 1)k \left(\frac{|x|}{k\alpha} \right)^{\beta},$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 1$ Обозначим

$$s(y) = \begin{cases} y^{(n-1)/2}, & y > 1, \\ 1, & y \leq 1. \end{cases}$$

Тогда пространство $L_2^*(w)$ изоморфно относительно преобразования Фурье-Лапласа пространству целых функций $H^2(\mathbb{C}^n)$ с нормой

$$\|F\|_{H^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^2 d\sigma(\tilde{h}(x)) dy \right)^{1/2},$$

$de \, dy = dy_1 dy_2 \dots dy_n,$
 $d\sigma \left(\tilde{h}(x) \right) = \exp \left(-2\tilde{h}(x) \right) \rho(|x|) \left(s \left(\frac{|x|}{h'(|x|)} \right) \right) dA \left(\tilde{h}(x) \right),$ и
 $dA \left(\tilde{h}(x) \right) = d\tilde{h}'_{x_1}(x) \wedge d\tilde{h}'_{x_2}(x) \wedge \dots \wedge d\tilde{h}'_{x_n}(x)$ – обобщенный оператор
 Монжа-Ампера, причем выполняется аналог равенства Парсеваля

$$c \|S\|_{L_2^*}^2 \leq \|\hat{S}(z)\|_{H^2}^2 \leq 3C \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2} \right)^{\frac{(n-1)}{2}} \|S\|_{L_2^*}^2 \quad (1)$$

Замечание: В работе [1] доказано, что верхняя оценка принципиально не улучшаема.

Литература

1. Youlmukhametov R. S. and Lutsenko V. I. Weighted Laplas transform. // Pitman Research Notes in Mathematics, Logman Scientific & Technical, –1991, – С. 232–240..
2. Saitoh S. Generalization of Paley–Wiener's theorem for entire function of exponential type. // Proc. Amer. Math. Soc. –99 (1987), С. 465–467.
3. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Обобщение теоремы Пэли – Винера на функционалы в пространствах Смирнова. // Труды Математического института им. В. А. Стеклова, Москва, «Наука», –1991 – Т. 200. –С. 245–254.
4. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Обобщение теоремы Пэли - Винера на весовые пространства. // Математические заметки –1990. –Т.48., –вып. 5, – С. 80–87.
5. Луценко В. И. Теорема Пэли - Винера на неограниченном интервале. // Исследования по теории приближений. Уфа, –1989, –С. 79–85.
6. Юлмухаметов Р. С. Асимптотика многомерного интеграла Лапласа. // Исследования по теории приближений. Уфа, –1989, –С. 132–139.
6. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Описание функционалов для весовых пространств с радиальным весом. // Вестник УГАТУ, серия –2007. – Т.9., –№. 3(21), –С. 104–109.