ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВУСТОРОННИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

@ А.Э. Рассадин

brat_ras@list.ru

УДК 517.938

*DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.*31.

В докладе даны примеры динамических систем как с непрерывным, так и с дискретным временем, с фазовым пространством в виде множества действительных двусторонних последовательностей. Показана связь этих примеров с динамическими системами в конечномерных пространствах, обладающими режимами детерминированного хаоса.

Ключевые слова: коммутативная алгебра с единицей, поток, каскад.

Dynamical systems in the space of double-sided sequences and deterministic chaos.

The report gives examples of dynamical systems with both continuous and discrete time with a phase space in the form of a set of real double-sided sequences. The connection of these examples with dynamical systems in finite-dimensional spaces with regimes of deterministic chaos is demonstrated.

Keywords: commutative algebra with unity element, flow, cascade

Пусть Λ — пространство всех двусторонних суммируемых действительных последовательностей, т.е.

$$x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \Lambda,$$

если конечна сумма ряда из её членов:

$$< x > \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \,. \tag{1}$$

Величину (1) будем называть псевдосредним значением последовательности $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Рассадин Александр Эдуардович, магистрант, Высшая школа экономики (Нижний Новгород, Россия); Alexander Rassadin (Higher School of Economics, Russia)

Если $x \in \Lambda$ и $y \in \Lambda$, то можно определить их произведение $x \star y$ как двустороннюю последовательность с членами:

$$(x \star y)_n \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \, y_{n-k} \, . \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) легко вывести, что:

$$< x \star y > \equiv < x > < y > , \tag{3}$$

значит, $x \star y \in \Lambda$ и Λ — коммутативная алгебра с единицей.

Предположим далее, что элементы алгебры Λ являются функциями непрерывного времени t: $x(t)$, $y(t)$, $z(t), \ldots \in \Lambda$, тогда на Λ можно задавать фазовые потоки с помощью счётномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим пример такой системы:

$$\begin{array}{c} \frac{dx}{dt} = \sigma \, y - \sigma \, x \\ \frac{dy}{dt} = r \, x - x \star z - y \\ \frac{dz}{dt} = -b \, z + x \star y \end{array} \ , \tag{4}$$

или в почленной записи:

$$\begin{array}{c} \frac{dx_n}{dt} = \sigma \, y_n - \sigma \, x_n \\ \frac{dy_n}{dt} = r \, x_n - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \, z_{n-k} - y_n \\ \frac{dz_n}{dt} = -b \, z_n + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \, y_{n-k} \end{array} \ , \tag{5}$$

где σ, r, $b \in \mathbb{R}$ — её параметры, а $n \in \mathbb{Z}$.

Применяя к обеим частям системы (4)-(5) операцию (1) и используя формулу (3), получим, что временная эволюция псевдосредних $< x(t) >$, $< y(t) >$ и $< z(t) >$ определяется известной системой Лоренца [1]:

$$\begin{array}{c} \frac{d<x>}{dt} = \sigma \ < y > - \sigma \ < x > \\ \frac{d<y>}{dt} = r \ < x > - < x > < z > - < y > \\ \frac{d<z>}{dt} = -b \ < z > + < x > < y > \end{array} \ , \tag{6}$$

демонстрирующей странный аттрактор в широком диапазоне своих параметров [1].

Динамическую систему на алгебре Λ можно задать и в дискретном времени, например, пусть:

$$x(m) = \lambda \, x(m-1) - \lambda \, x(m-1) \star x(m-1) \, , \qquad m \in \mathbb{N} \, , \qquad \lambda \in \mathbb{R} \, , \tag{7}$$

или в почленной записи:

$$x_n(m) = \lambda\, x_n(m-1) - \lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(m-1)\, x_{n-k}(m-1)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,, \quad (8)$$

тогда, переходя в системе (7) (или (8)) к псевдосредним, получим, что:

$$< x(m+1) >= \lambda\ < x(m) >\ (1- < x(m) >)\,. \quad (9)$$

Если $< x(0) >\in [\,0,1\,]$, то при $\lambda \in (\,0,4\,]$ это отображение является отображением отрезка $[\,0,1\,]$ в себя. Как хорошо известно, в этом случае при возрастании параметра λ от 0 до 4 отображение (9) демонстрирует переход к хаотической динамике через серию бифуркаций удвоения периода [2].

Динамические системы на Λ, дающие при взятии псевдосредних иные известные системы с детерминированным хаосом, такие как система Рёсслера или отображение Эно (см. [3] и ссылки там), выписываются с помощью соотношения (3) очевидным образом.

Литература

1. *Lorenz E.N.* Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences, **20**:2 (1963), 130-141.

2. *Feigenbaum M.J.* Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations // Journal of Statistical Physics, **19** (1978), 25-52.

3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос: курс лекций. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001.