ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НА АСИМПТОТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПОКАЗАТЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ «ХИШНИК-ЖЕРТВА» С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПО СХЕМАМ ЛЕСЛИ-ГОУВЕРА И ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ К II ТИПУ ХОЛЛИНГА

@ В.И. Борздыко

borzdiko37@mail.ru

УДК 517.9

*DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.*11.

На основе полученных ранее результатов сформулированы достаточные условия для асимптотической устойчивости по показательному закону положительного стационарного решения рассматриваемой системы «хишник-жертва» с запаздыванием при $0 \leq \tau < \tau_0$. Произведена оценка величины $\tau_0 > 0$.

Ключевые слова: система «хищник-жертва» с запаздыванием, асимптотическая устойчивость по показательному закону решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, положительно определённая матрица, матричное уравнение Ляпунова, спектральная норма матрицы.

On the study of asymptotic stability according to the exponential law of a positive stationary solution of the delayed predator-prey system, modified according to Leslie-Gower schemes and belonging to the Holling–type II

There are formulated on the basis of some earlier obtained results the sufficient conditions for the asymptotic stability according to the exponential law of the positive stationary solution of the considered delayed predator-prey system when time-lag in this system $0 \leq \tau < \tau_0$. The value of $\tau_0 > 0$ is estimated.

Keywords: a predator-prey system with time delay, asymptotic stability according to the exponential law of a solution of a system of differential equations with time delay, positive definite matrix, matrix Lyapunov equation, spectral norm of matrix.

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\left[a - bx_1(t) - \frac{cx_2(t-\tau)}{m_1 + x_1(t-\tau)}\right], \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)\left[r - \frac{dx_2(t-\tau)}{m_2 + x_1(t-\tau)}\right]. \end{cases} \tag{1}$$

Борздыко Вероника Ивановна, д.ф.-м.н., Институт математики им. А.Джураева НАНТ (Душанбе, Таджикистан); Borzdyko Veronika Ivanovna (Institute of Mathematics. A. Dzhuraeva, Dushanbe, Tajikistan)

В системе (1) параметры $\{a, b, c, d, r, m_1, m_2\}$ положительны, запаздывание $\tau \geq 0$. Эта система при $\tau = 0$, рассматривалась в качестве математической модели «хищник-жертва» в ряде статей. В (1) $x_1(t)$ – численность популяции «жертвы», $x_2(t)$ – численность популяции «хищника» в момент времени t. В [1] для математической модели «хищник-жертва» с запаздыванием вида (1) при $\tau \geq 0$ исследовался вопрос о глобальной устойчивости положительного положения равновесия системы.

Система (1) при определённом выборе положительных значений её параметров имеет положительное стационарное решение

$$x_1(t) \equiv \overline{x} > 0, \quad x_2(t) \equiv \frac{r}{d}(m_2 + \overline{x}) > 0. \tag{2}$$

Линеаризуя систему (1) на решении (2), получим систему вида

$$\frac{dz}{dt} = B_0 z(t) + B_1 z(t - \tau), \tag{3}$$

где $z = (x_1, x_2) \in R^2$; R^2 – евклидово пространство двумерных векторов с вещественными компонентами.

Для рассматриваемой нами задачи элементы квадратной матрицы $A = B_0 + B_1$, соответствующей линеаризованному уравнению (3), определяются равенствами

$$a_{11} = a - 2b\overline{x} - \frac{crm_1(m_2 + \overline{x})}{d(m_1 + \overline{x})^2};\ a_{12} = -\frac{c\overline{x}}{m_1 + \overline{x}};\ a_{21} = \frac{r^2}{d},\ a_{22} = -r. \tag{4}$$

Используя результаты статей [2], [3] доказана

Теорема. *Пусть для элементов (4) матрицы* $A = B_0 + B_1$ *выполняются два неравенства* $a_{11} + a_{22} < 0$; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. *Тогда положительное стационарное решение (2) системы (1) асимптотически устойчиво по показательному закону при* $0 \leq \tau < \tau_0$,

$$\tau_0 = \min(2l_i)[2(\|B_0\| + \|B_1\|)\|HB_1\|]^{-1} \left[\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где H *симметрическая вещественная положительно определённая матрица, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова*

$$(B_0^T + B_1^T)H + H(B_0 + B_1) = -C. \tag{6}$$

В уравнении (6) обозначено: B_j^T – матрица, транспонированная к матрице B_j, $j = 0, 1$; матрица

$$C = \begin{pmatrix} 2l_1 & 0 \\ 0 & 2l_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad l_i > 0,\ i = 1, 2.$$

В (5) нормы матриц – это спектральные матричные нормы, индуцированные евклидовой нормой в R^2, [4, с. 184-186].

Сделана проверка, что при некоторых конкретных подборах положительных значений параметров системы «хищник-жертва» (1) все условия сформулированной выше теоремы могут одновременно выполняться и при этом равенство (5) определяет конечное положительное число $\tau_0 > 0$.

Литература

1. *A.F. Nindjin, M.A. Aziz-Alaoui, M. Cadivel.* Analysis of a predator-prey model with modified Leslie–Gower and Holling–type II schemes with time delay // Nonlinear Anal. Real World Appl. 7 (2006). 1104-1118.

2. *Борздыко В.И.* Об асимптотической устойчивости периодического решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // ДАН Тадж. ССР. 33:10 (1990). 637-641.

3. *Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А.* Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом // Укр. матем. журнал. 35:2 (1983). 261-264.

4. *Ланкастер П.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1982.